

1. インストルメント - ビーム計測とビーム安定化 -

1. はじめに

粒子ビーム加速器は長年に渡って進化を遂げ、種々の目的に適合した加速器が運転、建設、あるいは計画されている。それらにおけるビーム計測も、当然ながら、それらに応じて最適化、細分化された様々な方法および装置がある。ここではそれらのうち、ビームとの電磁氣的な相互作用を利用するビーム計測に絞って解説を試みる。そうは言ってもなお広範な対象であるので、著者の長年携わってきた陽子加速器（「中高エネルギー」）に偏重することを御了承いただきたい。

ビームと装置との電磁氣的相互作用を考えると避けて通れないのが、いわゆる「ウェーク場 (wake field)」「結合インピーダンス (coupling impedance)」である。ビームがビームダクト、RF 空洞やキッカー電磁石などの種々の真空装置と電磁氣的に結合して、「集団不安定性 (collective instability)」を持つに至ることがある。早い話が、ビームの作った電磁場で自分自身が蹴られて、振動を始め、遂にはエミッタンス増大 (サイズ増大) やビーム損失を起こしたりするのである。ここでは、出来るだけ簡単な式と直感的説明により、その原因になる機器の結合インピーダンスのベンチ測定、ビーム不安定性の観測、ビーム不安定性の安定化について説明したい。このテーマについても全てを網羅することは困難であったことをお断りしておく。

2. ビームに付随する電磁場

ビーム計測をするためには、ビームからの信号について理解をしておく必要がある。ビームが真空パイプ中を走る時にはその周囲に電磁場を伴う。その電磁エネルギーの一部を観測のために信号として取出す。例えば、運動エネルギー 1 GeV で粒子数 10^{12} 個の陽子ビームが 850kHz でリング加速器を周回していると、周回ビーム電流は

136mA となり 136MW に相当する信号源である。一方、何らかの方法でデューティ 50% で 1V のビーム信号を $50\ \Omega$ 負荷で得たとすると、これは 10mW に相当する。すなわちその比は $\sim 7 \times 10^{-11}$ であり、ほとんどビームを乱すことはない。すなわち、ほとんどの場合、ビームを理想的な電流源、あるいは電圧源と考えることができる。

一方、ビームは様々な挙動をする。コースティング・ビームであったり、バンチド・ビームだったりする。ベータトロン振動を起こしたり、シンクロトロン振動を起こしたりする。それらの挙動によって発生する電磁場は変化するので、取出される信号も対応して変化する。実際には、信号を測定してその時々々のビームの挙動を推定するのである。一台でビームの全挙動を測定できるようなものは存在しない。それぞれの目的に合わせて特性が大きく異なる「インストルメント=ビームモニター」を用意することになる。

ビームモニターの設計の大きな流れを、誤解を恐れず敢えて言うならば、

- (0) 測定したいビームの物理量を決める：
物理量の大きさの範囲、所要精度、分解能。
- (1a) ビームの電磁場を計算する：
電場、磁場、電流の強度、周波数スペクトル。
- (1b) 信号の時間・周波数構造の把握
- (2) 検出器構造の最適化
- (3) 処理回路の最適化
- (4) システムの最適化

となろう。上記のステップの多少のイテレーションは必要になろう。

実はステップ(0)が結構曲者である。検出器は、ビームの全挙動を測定できはしないが、たいてい、いくつかの物理量を測ることは可能である。また、その精度、動作範囲、周波数帯域幅など、ビームモニターのユーザーの要望は、加速器デザインの段階、さらにビーム運転開始後の使用経験とともに流動する。また出来ないことはできない (物理法則に背くことは出来ない。「自然の女神」さまとうまく妥協することはできる。)。ここは、日頃からビームモニターの使用実績を理解し、ま

たモニター・ユーザーとのコミュニケーションを図ることが重要になる。

ここでは最初の一步として、まず、ビームに付随する電磁場の一般的考察を行なう。

2.1. 真空パイプ中のビームの電磁場[1]

簡単のために、真空パイプは完全導体で、半径 a の円筒パイプで、無限の長さであるとする。 z 軸をビームの進行方向とする円柱座標 (r, θ, z) を使う。ビームが速度 v で (r_0, θ_0) を進んでいるとする (図 1)。空間時間構造が $e^{-jk(z-vt)}$ の下記のような疎密波だとする¹。 $k = \omega/v$ とした。

$$\rho = \rho_0 \frac{\delta(r-r_0)}{r_0} \delta(\theta-\theta_0) e^{-jk(z-vt)},$$

$$\mathbf{J} = v\rho = \mathbf{J}_0 \frac{\delta(r-r_0)}{r_0} \delta(\theta-\theta_0) e^{-jk(z-vt)}.$$

ビームの静止系では、ビーム電流が消え、ビーム電荷：

$$\rho^* = \frac{\rho_0}{\gamma} \frac{\delta(r-r_0)}{r_0} \delta(\theta-\theta_0) e^{-jkz^*/\gamma},$$

のみになる。静電場 $\Phi^*(r, \theta, z^*)$ の方程式は、

$$\nabla^2 \Phi^* = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0 \gamma} \frac{\delta(r-r_0)}{r_0} \delta(\theta-\theta_0) e^{-jkz^*/\gamma}.$$

解を

$$\Phi^*(r, \theta, z^*) = \mathbf{F}^*(r, \theta) \frac{\rho_0}{\gamma} e^{-jkz^*/\gamma},$$

とおくと、 $\mathbf{F}^*(r, \theta)$ は非斉次ヘルムホルツ方程式

$$\nabla_{\perp}^2 \mathbf{F}^* - \left(\frac{k}{\gamma}\right)^2 \mathbf{F}^* = -\frac{\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)}{\epsilon_0 r_0},$$

を満たす。ビームが光速に近くなると ($\gamma \rightarrow \infty$)、ポアソン方程式になる。解は、第1種、第2種変形ベッセル関数 $I_m(z)$ 、 $K_m(z)$ を使い、境界条件 ($r=0$ で有限、 $r=a$ で $\mathbf{F}^*=0$) を満たすように決定し、 $r > r_0$ では

$$\mathbf{F}^*(r, \theta) = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2-\delta_{m0})}{2\pi\epsilon_0} \frac{I_m(kr_0/\gamma)}{I_m(ka/\gamma)} \times [K_m(ka/\gamma)I_m(kr/\gamma) - I_m(ka/\gamma)K_m(kr/\gamma)] \times \cos m(\theta - \theta_0),$$

となる。電磁場は、

$$E_r = -\gamma \frac{\partial \Phi^*}{\partial r}, \quad E_{\theta} = -\gamma \frac{\partial \Phi^*}{\partial \theta}, \quad E_z = \frac{\partial \Phi^*}{\partial z^*},$$

$$B_r = -\frac{v}{c^2} E_{\theta}, \quad B_{\theta} = \frac{v}{c^2} E_r, \quad B_z = 0,$$

から求められ、

$$E_z(r, \theta) = -\frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{jk}{\gamma^2} \sum_{m=0}^{\infty} (2-\delta_{m0}) \frac{I_m(kr_0/\gamma)}{I_m(ka/\gamma)} \times [K_m(ka/\gamma)I_m(kr/\gamma) - I_m(ka/\gamma)K_m(kr/\gamma)] \times \cos m(\theta - \theta_0),$$

$$E_r(r, \theta) = -\frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{k}{\gamma} \sum_{m=0}^{\infty} (2-\delta_{m0}) \frac{I_m(kr_0/\gamma)}{I_m(ka/\gamma)} \times [K_m(ka/\gamma)I'_m(kr/\gamma) - I_m(ka/\gamma)K'_m(kr/\gamma)] \times \cos m(\theta - \theta_0),$$

などが得られる。 $\delta_{m0}=1$ ($m=0$)、 $\delta_{m0}=0$ ($m \neq 0$) である。パイプ内面に、 B_{θ} に比例する電流が流れ、

$$J_W = \frac{B_{\theta}}{\mu_0} = \frac{v}{\mu_0 c^2} E_r = -\frac{\rho_0 v}{2\pi a} \times \sum_{m=0}^{\infty} (2-\delta_{m0}) \frac{I_m(kr_0/\gamma)}{I_m(ka/\gamma)} \cos m(\theta - \theta_0), \quad (1)$$

となる。これを壁電流 (wall current) と呼ぶ。

2.1.1. 相対論的ビーム ($\gamma \rightarrow \infty, v/c \approx 1$) の場合

電子、陽電子は質量が小さいため、加速段階の初期からすぐに相対論的になる。ビームが z 軸上を進んでいるとすると、 J_W で $m=0$ 以外の項は消えて、壁内面に一様な電流が、電流密度

$$J_W(k) = -\frac{\rho_0 v}{2\pi a} \frac{1}{I_0(ka/\gamma)}, \quad (2)$$

で流れる。上式は周波数スペクトルなので $z-vt$ の空間ではこれのフーリエ逆変換となる。周波数の広がり $\sim \gamma/a$ の程度で、 z 軸方向には逆数の $\sim a/\gamma$ の広がりを持つことがわかる。

¹ $e^{j\omega t}$ は engineering 関係でよく使われる。物理関係では $e^{-i\omega t}$ が普通である。ここでは計測器になじみやすい $e^{j\omega t}$ を使う。例えば、インダクタンスのインピーダンスは、engineering convention では $j\omega L$ 、physics convention では $-i\omega L$ 。ネットワークアナライザの測定結果の符号は engineering convention なので要注意。

$\gamma \rightarrow \infty$ の極限では、 z 軸方向の広がりが無くなり、電磁場は、ほとんど横方向 (transverse) 成分のみをもち、TEM 波に近くなる。この極限では、 z 軸からずれたビームによる壁電流は、

$$J_W \approx -\frac{\rho_0 v}{2\pi a} \sum_{m=0}^{\infty} (2-\delta_{m0}) \left(\frac{r_0}{a}\right)^m \cos m(\theta-\theta_0)$$

$$= -\frac{\rho_0 v}{2\pi a} \frac{a^2 - r_0^2}{a^2 + r_0^2 - 2a r_0 \cos(\theta-\theta_0)}, \quad (3)$$

となる。

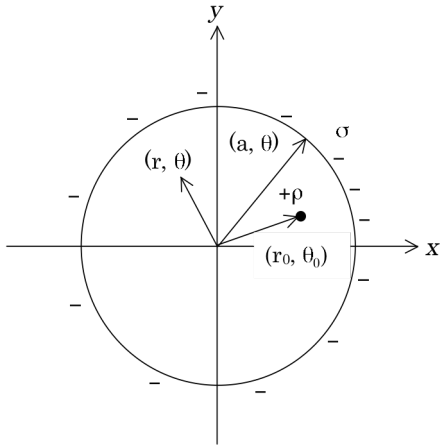


図 1: 円筒パイプ中のビーム。

2.1.2. 非相対論的ビームの場合

γ は、同エネルギーの粒子と比較すると質量に逆比例する。陽子ビーム、イオンビームなどでは質量が大きいため、同エネルギーの電子に比べておよそ 1/2000 以下である。例えば J-PARC では

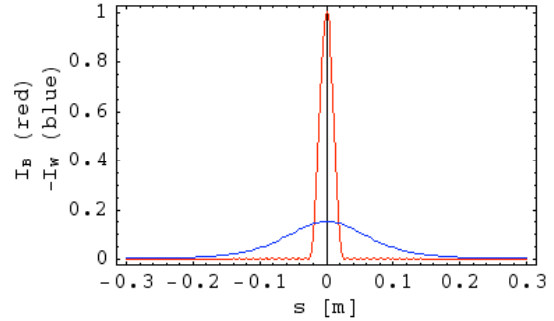
	Energy	γ
LINAC	≤ 0.181 (0.4) MeV	≤ 1.2 (1.4)
RCS	≤ 3 GeV	≤ 4.2

である。そのため、モニターを設計するにあたって注意を要する。

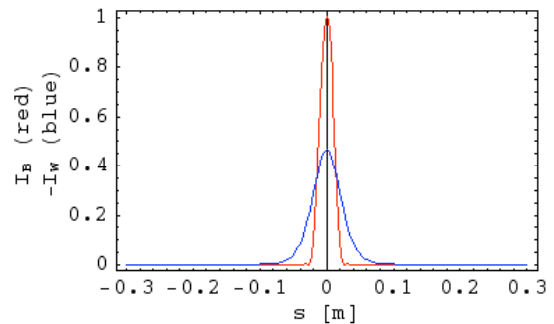
壁電流の分布の式(2)による計算値を図 2 に示す。J-PARC RCS のビームパイプの典型値をとって半径 130 mm としている。まずビームのバンチ長 5 cm の時に、壁電流の広がりはバンチ長に比べて、181 MeV では約 5.9 倍だったものが、加速して 3 GeV になると約 1.9 倍に減少する (半値幅で比較)。バンチ長が広がって 5m では 181 MeV でもバンチ長とほぼ同じである。このために、低エネルギー陽子ビームでは、短バンチの場合、パ

イプ表面の電磁場からビーム長を求めようとする問題が生じる¹。

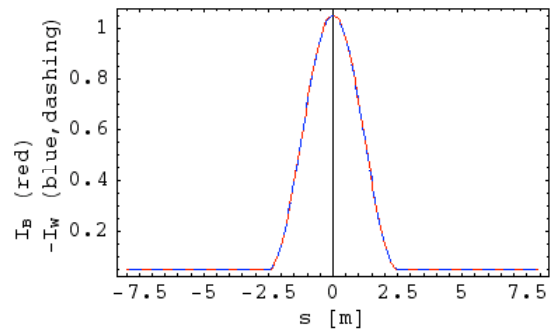
横方向でも問題が起きる。文献[4]で詳しく論じられている。



(a)



(b)



(c)

図 2: 半径 130mm の円筒パイプ (J-PARC RCS の典型値) を流れる壁電流。赤線: 長さ 5cm (a, b) または 5m (c) のバンチ波形、青線: 壁電流 (負号は変転してある)。(a) 陽子 181 MeV、(b) 陽子 3 GeV、(c) 陽子 3 GeV。 $s=z-vt$ として式(2)をフーリエ逆変換した。

¹ 解決法としていくつかのものがある。Bunch shape monitor [2]、laser profile monitor [3] など。

2.2. ビームの時間構造と周波数スペクトル

ビームは、通常バンチ構造を持つが、あるいはビーム利用の目的によっては、DC 的なコースティング・ビームの形態をとる。また、加速器の運転周期に関連する時間構造をもつ。

例として J-PARC の加速器のケースを紹介する。LINAC の場合は図 3 のようなものである。また、RCS および MR は、おおよそ図 4 のような時間構造となっている。

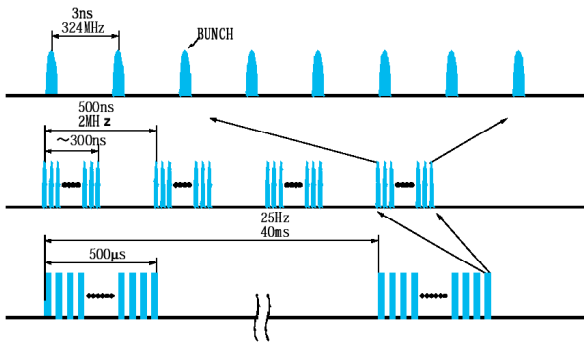


図 3 : LINAC ビームの時間構造

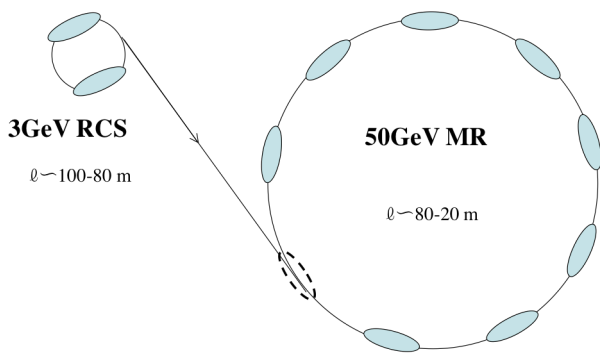


図 4 : RCS, MR のビーム

これらの信号の定量的な解析のために、簡単な場合を考察する。デルタ関数的なパルス信号が、 T_0 の周期でくるとする。この信号は

$$v(t) = v_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0),$$

と書ける。このような時間を独立変数とする信号を時間領域 (time domain) の信号と呼ぶ。これ

をフーリエ展開すると、 $\omega_n = n\omega_0 = 2\pi n/T_0$ において

$$v(\omega_n) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{v_0}{T_0},$$

を使って

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(\omega_n) e^{jn\omega_0 t} = \frac{v_0}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t},$$

となる。これを図 5 に示した。このような周波数を独立変数とする信号を周波数領域 (frequency domain) の信号と呼ぶ。ここで特徴的なことは、時間領域でのピークの間隔 T_0 が、周波数領域に移ると周波数間隔 $\Delta f = 1/T_0$ になることである。

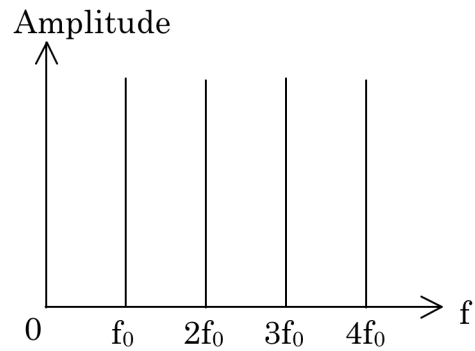


図 5 : 周期 T_0 の δ 関数波形の周波数スペクトル。
 $f_0 = 1/T_0$.

いくつかの典型的なビーム形状についての時間領域、周波数領域の信号を示す。

ビーム波形を $I(t) = I_0 \{ 1 - \cos(2\pi t/\tau_b) \} / 2$ とした時の周波数スペクトルは以下ようになる。

$$I(\omega) = 2I_0 \frac{\sin(n\omega_0\tau_b)}{n\omega_0\tau_b} \frac{1}{1 - (n\omega_0\tau_b/\pi)^2} \frac{\sin(n'\pi n/h)}{\sin(\pi n/h)},$$

I_0 : average (circulating) current,

n : integer,

n' : number of bunches,

h : harmonic number,

ω_0 : revolution angular frequency,

τ_b : bunch half width.

ビーム波形が矩形、half-sin、cos (上式) ときの波形と周波数スペクトルを図 6 に示す。デルタ関数は例外的に周波数領域で信号振幅が一定であるが、時間領域で或る時間幅 ΔT をもつ信号は、周波数領域では、信号強度の包絡線の幅はおおよ

そ $\Delta f = 1 / \Delta T$ となる。短い時間波形を測定するには、より広い周波数帯域幅が必要になる。

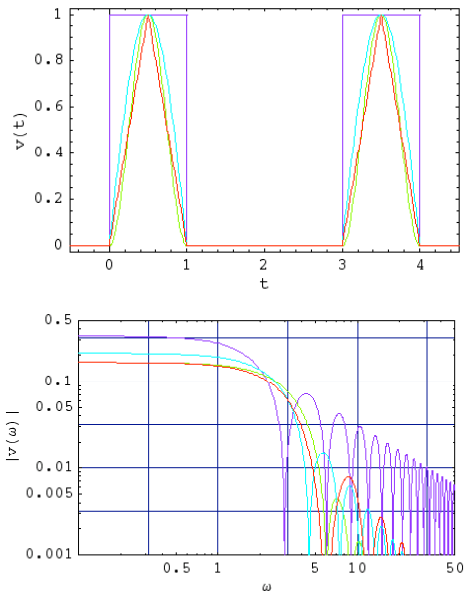


図 6：時間構造と周波数スペクトル。赤線：三角波、緑線：正弦波（1 周期）、青線：正弦波（半周期）、紫線：矩形波。

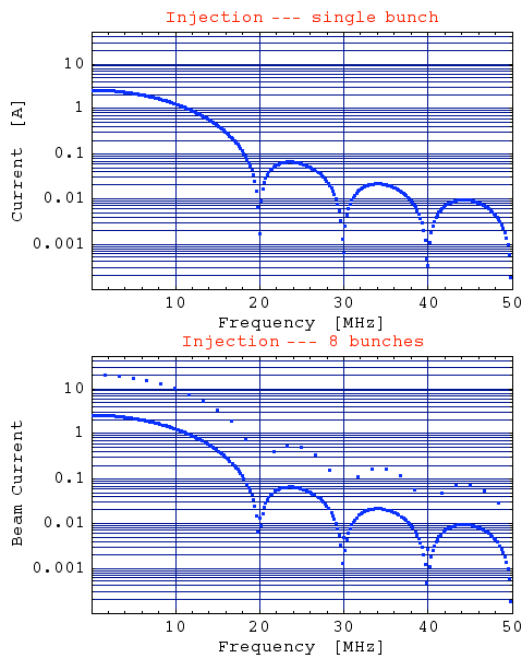


図 7：周波数スペクトル。J-PARC MR 入射エネルギーの場合。h=9。上図は 1 バンチのみ。下図は 8 バンチ蓄積している。

ビームがシンクロトロン振動するときは、周波数スペクトルは以下ようになる。ビームの周回時間がシンクロトロン振動

$$T'_0(t) = T_0 + \Delta T \cos(\omega_s t),$$

によって振動するので、信号は

$$v(t) = v_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT'_0(t)),$$

のように書き換えられる。これは

$$\begin{aligned} v(t) &\approx \frac{v_0}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega(t - \Delta T \sin(\omega_s t))} \\ &= \frac{v_0}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega t} e^{-jn\omega \Delta T \sin(\omega_s t)} \\ &= \frac{v_0}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(n\omega \Delta T) e^{-jm\omega_s t} \\ &= \frac{v_0}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(n\omega \Delta T) e^{j(n\omega - m\omega_s)t}, \end{aligned}$$

となる。ここで関係式

$$e^{jz \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{jn\theta},$$

を使った[ref]。 $J_m(z)$ は m 次の第 1 種ベッセル関数である。 $n=0$ で J_0 以外はゼロなので、 $m=1, 2, \dots$ のサイドバンドはない。ラジオ波の FM（周波数変調）に類似している。模式的な周波数スペクトルを図 8 に示す。図 8 は理解の助けのために誇張してある。例えば J-PARC リングの場合シンクロトロン振動数は数 10Hz ~ 数 kHz、加速時間は 10 ms ~ 1 s のオーダーである。加速中に周波数は変化する。従って下記のように鮮明なスペクトルを見るのはむづかしい。

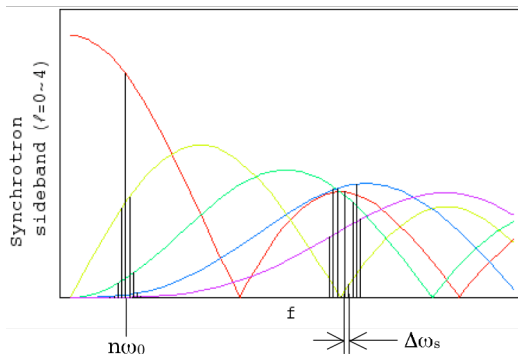


図 8：シンクロトロン サイドバンド

ビームはいつも z 軸上を走るわけではない。横方向 (transverse) すなわち z 軸に垂直な方向に変位して通過する、しかも変位が周期的に変化することがある。これをベータatron振動と呼ぶ。ピックアップが設置されている場所で、リングを周回するビームを n 周期目で観測した時のビーム位置は

$$x_P(nT_0) = x_{P0} + A\sqrt{\beta_P} \cos(v_\beta \omega_0 nT_0 + \phi),$$

である。 x_{P0} は時間的に変化しない変位 (閉軌道)、 β_P はベータatron関数で場所によって異なる値をとる、 v_β はベータatronチューン、 A, ϕ は初期振幅、位相である。この振動からの寄与が加わると、

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{v_0}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \left(1 + \Delta v \frac{e^{j(v_\beta \omega_0 t + \phi)} + e^{-j(v_\beta \omega_0 t + \phi)}}{2} \right) \\ &= \frac{v_0}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \\ &\quad + \frac{v_0}{T_0} \Delta v \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j[(n+v_\beta)\omega_0 t + \phi]} + e^{j[(n-v_\beta)\omega_0 t - \phi]}}{2}. \end{aligned}$$

$\omega = n\omega_0$ の両側に、ベータatron振動振幅に比例する大きさのサイドバンド $\omega = \omega_0(n \pm v_\beta)$ ができるとわかる。図 9 に J-PARC MR で測定されたベータatron振動の周波数スペクトルを示す。

測定データからわかるのは、図 9 のように $\omega = (n' \pm \Delta v_\beta)\omega_0$ のみである。 Δv_β を v_β の端数部とすると、 $v_\beta = n' - n \pm \Delta v_\beta$ ($n, n' = -\infty \sim -1, 0, 1, \infty$) を満たす n, n' は無数にあるので、 v_β の端数部しかわからない。 v_β の整数部を知るには、例えば直接的には、リング全周のベータatron振動を追って振動数を数えれば良い。

図 10: J-PARC MR 入射時のベータatron振動(垂直方向)。に J-PARC MR の入射エラーで発生した垂直方向のベータatron振動をリング一周にわたって測定した結果を示す。振動が 21 にやや足りない程度であると読み取れる。実際、設計値は ~ 20.7 付近である。

ベータatron チューンが、例えば 20.7 なのか 21.3 なのかは、4 極電磁石の収束力をかえてみて、チューンの増減の向きを調べれば判別できる。

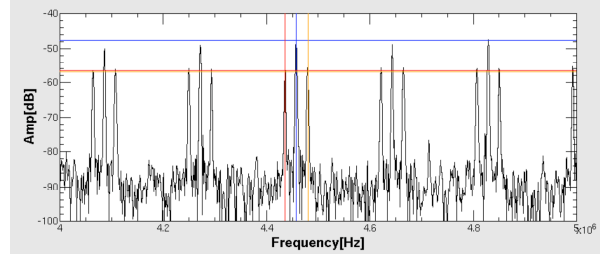


図 9: ベータatronサイドバンド (J-PARC MR)。

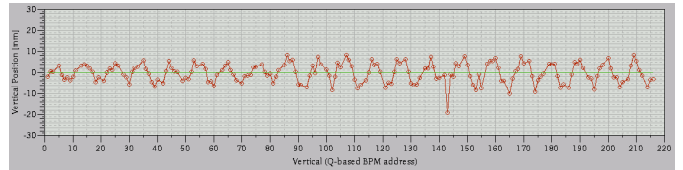


図 10: J-PARC MR 入射時のベータatron振動 (垂直方向)。

2.3. ビーム不安定性と信号[5]

ビームが不安定になると、様々な徴候が現れてくる。ここでは、ビームの位相空間での集団運動をモードに分解して考える方法を簡単に紹介し、前節の時間・周波数領域の波形と関連づけたい。

ビームの運動は 3 次元であるが、進行方向 (縦方向) の振動数と、横方向の振動数が大きく異なるので、両方向の運動が結合を起しているような特別な場合を除いて、それぞれを分けて考えることができる。例えば J-PARC リングの場合シンクロtron振動数は数 10Hz ~ 数 kHz (前出)、ベータatron振動数は数 MHz で、およそ 3 桁も離れている。

2.3.1. 縦方向のモード

まず進行方向 (縦方向) のモードを考える。横方向は振動しないとする。この場合の縦方向の位相空間でのビーム分布を考える。安定ビーム分布が $\psi_0(r)$ 、そこからの微小なずれが $\psi_1(r, \phi)$ だとする:

$$\psi(r, \phi) = \psi_0(r) + \psi_1(r, \phi) e^{j\Omega s/c}.$$

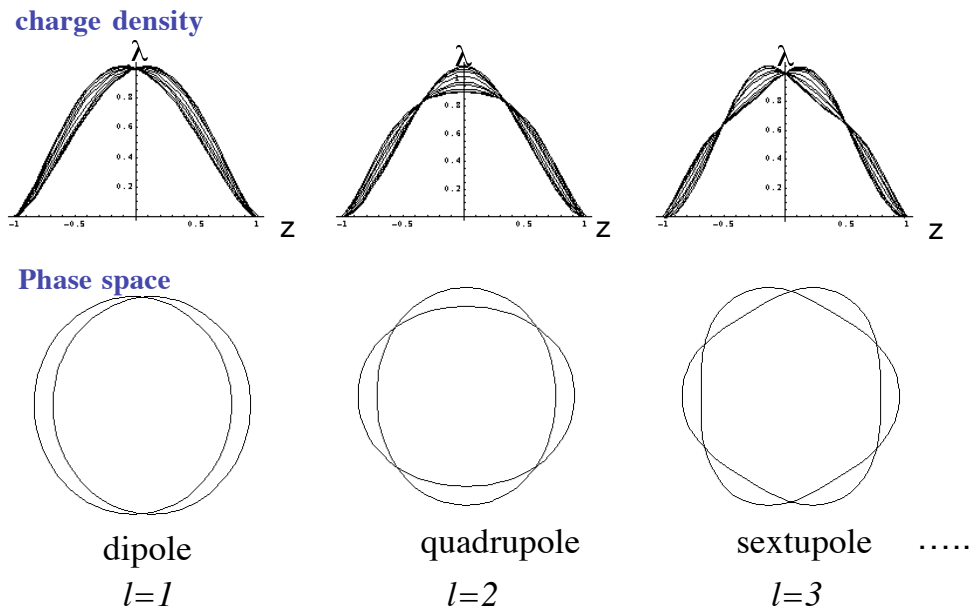


図 11 : Longitudinal modes

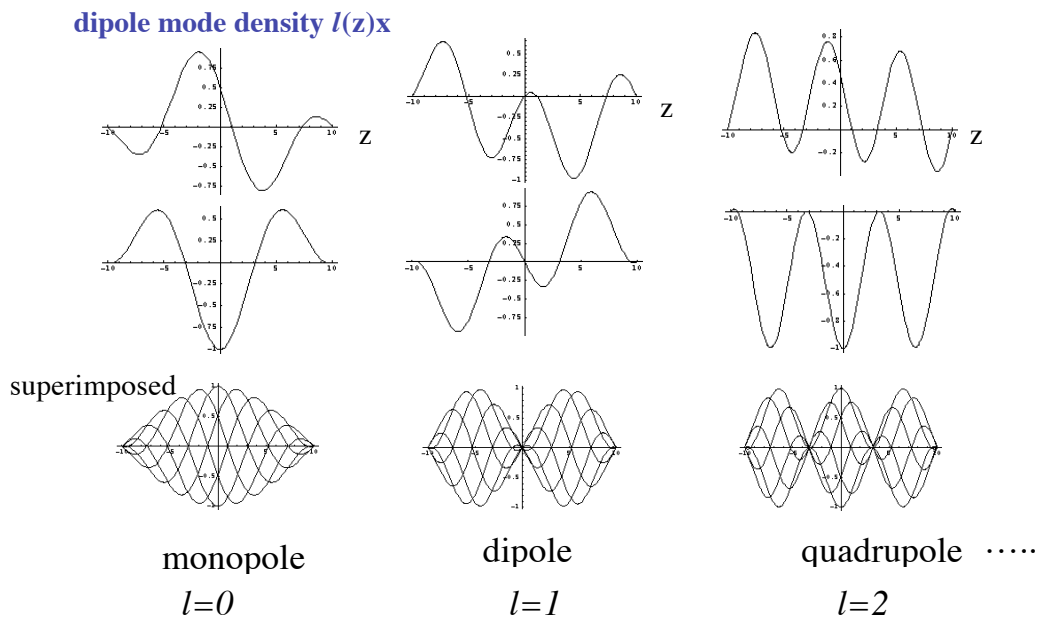


図 12 : Transverse modes. z 軸 (t 軸) に沿って位置信号を見ている.

微小な変形を表す分布は、

$$\psi_1(r, \phi) = \sum_{\ell} \alpha_{\ell} R_{\ell}(r) e^{-j\ell\phi},$$

と、位相空間内の動径方向と角度方向のモードの重ね合わせで書くことができる。モード $\ell = 1 \sim 3$

を模式的に図 11 に示した。下段が位相空間内の分布の変形で、上段がその z 軸 (t 軸) への射影である。通常ビームモニターではこの射影が観測される。

2.3.2. 横方向のモード

横方向モードは、水平または垂直方向の位相空間での、縦方向と同様の振動モードである。しかし、横方向では、進行方向の運動も考慮しなければならない。両方向の運動が結合する例である。横方向の分布を $f_0(q, \theta)$ 、 $f_1(q, \theta)$ 、縦方向の分布を $g_0(r, \phi)$ 、 $g_1(r, \phi)$ として、近似的には

$$\psi(r, \phi; q, \theta) \approx f_0(q)g_0(r) + f_1(q, \theta)g_1(r, \phi) e^{j\Omega s/c}$$

となる。 $\Omega = \omega_\beta + l\omega_s - \xi\omega_\beta / \eta$ である。

図 12では、横方向に dipole、縦方向に $l = 0, 1, 2$ のモードの場合の振動パターンを示した。

3. ビーム計測

3.1. 電流値、バンチ長の計測

ビーム電流を測定する装置には、高域遮断周波数の大きい順に、WCM、CT、フィードバック型 CT、DCCT がある。

3.1.1. Wall Current Monitor (WCM)

2.1節で述べたように、ビームパイプの内側には、ビーム電流 I_B と同じ方向で逆符号の壁電流 (wall current) $I_W = -I_B$ が流れる。ビームパイプを一カ所で切って、抵抗を取付けると電圧 RI_W が発生することが予想できる (図 13)。実際に測定するには電磁ノイズのシールドのために、導体で囲うことが必要になる。すると、壁電流はより低いインピーダンスのシールドを流れてしまうので、それを阻止するために磁性体コアを挿入する。最終的に図 14のようなセットアップになる。

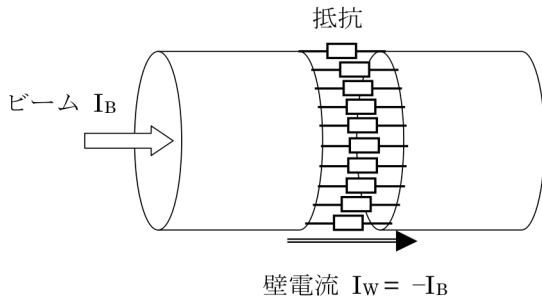


図 13 : 壁電流の測定

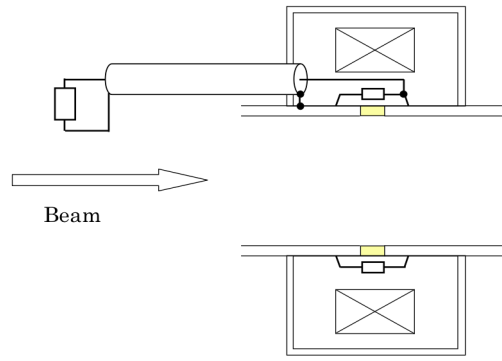


図 14 : 実際の Wall Current Monitor

その結果、低域遮断周波数は、コアのインダクタンスを L 、負荷抵抗を R として

$$\omega_L = \frac{R}{L},$$

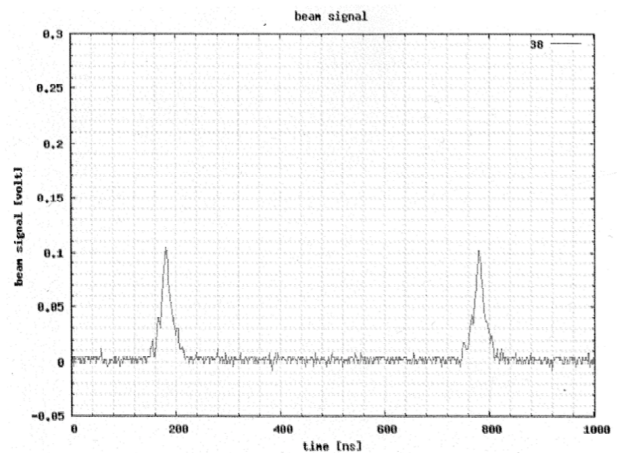
低域の周波数特性は

$$V(\omega) = \frac{j\omega/\omega_L}{1 + j\omega/\omega_L} RI_B,$$

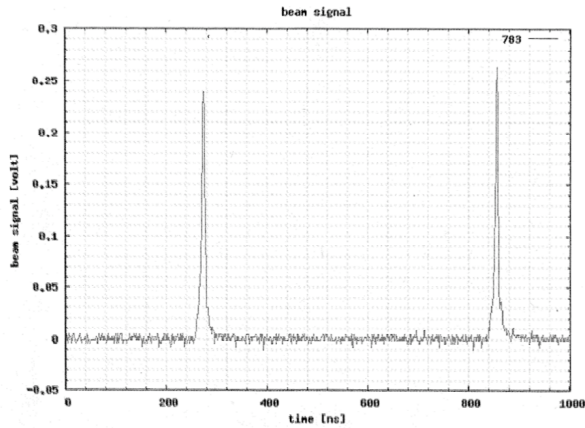
となる。

コアや抵抗は、清浄な真空を保つために大気側に置かなければならない。そのため通常、パイプの切れ目にはリング状のセラミクスを接合して気密を保つ構造にする。内面のチャージアップを避けるために、TiN 薄膜などのコーティングを施すこともある。その場合は負荷抵抗より十分高い抵抗値にする必要がある。

J-PARC MR での検出波形の例を図 15に示す。



(a)



(b)

図 15: J-PARC MR の WCM によるバンチ波形の観測。(a)入射時 (b)フラットトップ (30GeV)。

3.1.1.2. Current Transformer (CT)

Current Transformer (CT)は、ビーム電流を測定する標準的な診断装置である (図 16)。

ビーム電流 I_B および 2 次巻線に流れる電流 I が磁性体コア内につくる磁場は

$$B = \frac{\mu I_B}{2\pi r} + \frac{\mu NI}{2\pi r},$$

である。2 次巻線に発生する誘導電圧は

$$V = \frac{d}{dt}(NBS).$$

2 次巻線には負荷抵抗が接続されている (たいてい 50Ω) ので

$$V = -RI,$$

となる。電流の流れ込む向きを正にとっている。

まとめると、

$$\frac{d}{dt}(NS \frac{\mu(I_B + NI)}{2\pi r}) = -RI,$$

$L = \mu N^2 S / 2\pi r$ をつかうと、

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = -\frac{d}{dt} \left(\frac{I_B}{N} \right),$$

なる微分方程式が得られ、解は

$$V(t) = RI(t) = R \left\{ \int_0^t \frac{dI_B(t')}{dt'} \frac{e^{Rt'/L}}{N} dt' \right\} e^{-Rt/L}.$$

周波数領域では、

$$V = \frac{j\omega / \omega_L}{1 + j\omega / \omega_L} \frac{RI_B}{N},$$

$$\omega_L = \frac{R}{L},$$

となる。

図 17、図 18、図 19に KEK-PS MR の CT の例を示す。低域遮断周波数が 800 Hz 、時定数 $\sim 0.2 \text{ ms}$ で、 100 ns のバンチ長に対しては十分である。

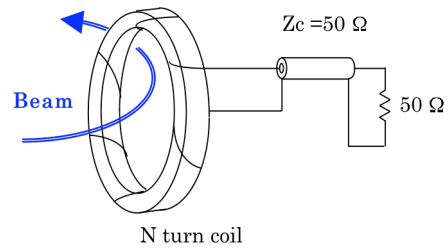


図 16: CT (N-turn coil)

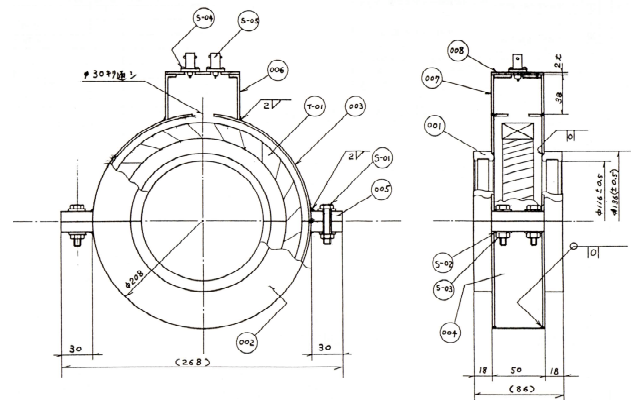


図 17: CT の構造

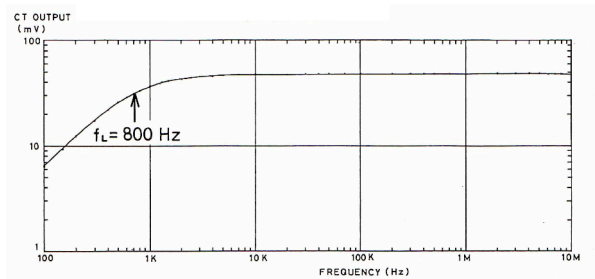


図 18: CT の周波数特性

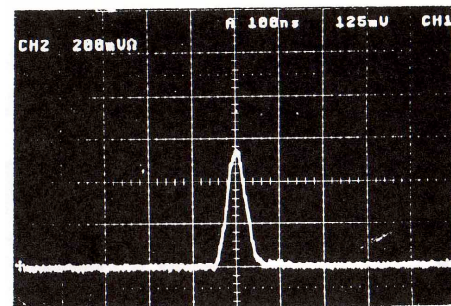


図 19: CT によるビーム信号波形

高周波側は、負荷抵抗に並列の浮遊容量 C_s が存在するとしてモデル化でき、以下の周波数特性を得る：

$$V = \frac{j\omega/C_s R}{-\omega^2 + j\omega/C_s R + 1/LC_s} \cdot \frac{RI_B}{N}$$

J-PARC では、大強度ビームを想定してコイル巻数を大きくした。設計ビーム電流はバンチのピーク値で 200A にも達する。2 次側（負荷抵抗）に流れる電流は I_B/N なので、負荷抵抗を 50Ω 、あるいは反射吸収用の抵抗 50Ω を並列に入れて 25Ω としても、出力電圧は $5/N \sim 10/N \text{ kV}$ 、消費パワーの瞬時値は $1/N^2 \sim 2/N^2 \text{ MW}$ にも達する。一方、設計強度の 1% のビームも観測する必要があるので負荷抵抗は減らさないことにした。低周波遮断周波数は、 $\omega_L = R/L$ 、 $L = \mu N^2 S/2\pi r$ なので、低周波遮断周波数も消費パワーも巻数の 2 乗で改善することになる。MR では $N=50 \text{ turn}$ 、 $R=25 \Omega$ ($50 \Omega, 2 \text{ para.}$) とした。巻数を増やすと浮遊容量による高周波特性の悪化が問題となる。さらに現実的な伝送線路モデルで解析した結果、

$$v(\ell) = \frac{Z_c(jZ_0(1 - \cos kl) + Z_c \sin kl)}{-jZ_c(Z_0 + Z_\ell) \cos kl + (Z_c^2 + Z_0 Z_\ell) \sin kl} \cdot \frac{Z_\ell I_b}{N}$$

で良く表されることがわかった。

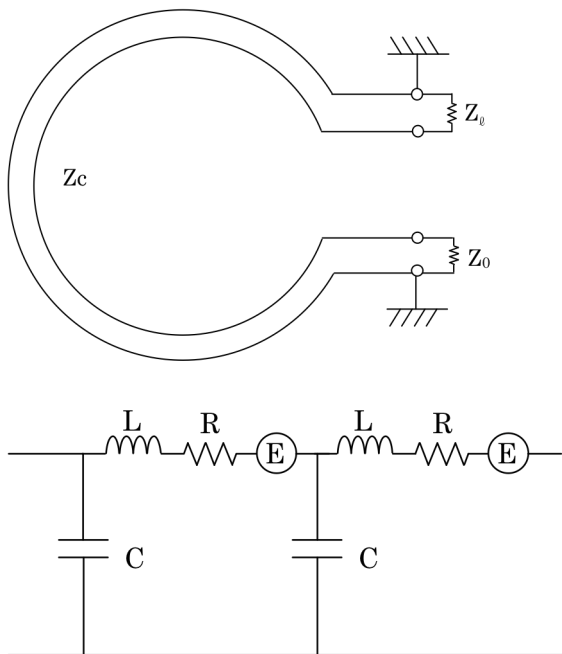


図 20 : CT の伝送線路モデル

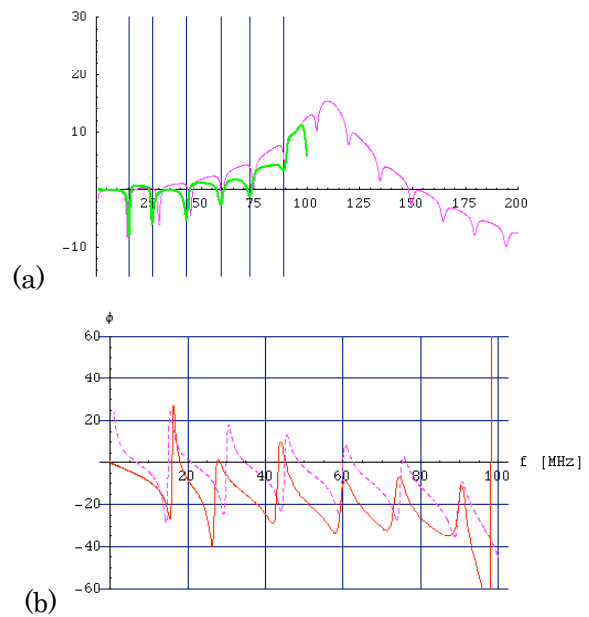


図 21 : CT の周波数特性の実測と計算。(a) 振幅、(b) 位相。

図 20 に使ったモデルを示す。図 21 に、 $f \sim 220 \text{ MHz}$ の空洞共振の効果も含めてプロットしてある。直径 300mm 程度、コアに沿った長さで $\sim 1 \text{ m}$ 程度である。電磁波は、真空中では 10 MHz で波長 30m であるのが、CT の構造中では反共振が起こる程度まで波長短縮が起きていると考えられる。一定周波数間隔で反共振を繰り返す。現在の CT では抵抗によるダンピングで共振を緩和している (3.3.1 節)。

共振周波数を上げるには、例えば、2 次コイルを上下左右の 4 カ所に局所的に巻けばよい。4 カ所からの信号の和信号をとれば、ビーム強度に比例する信号を得ることができる。上下左右の和をとることで横方向の 4 極モード以下の多重極成分の影響を抑制できる。一方、所望の周波数帯域で信号合成を行なう必要がある。

3.1.3. フィードバック型 CT

前節で述べた CT では、低域遮断周波数に限度がある。蓄積時間 数 10ms ~ 数 s をこえるビームの強度を相対精度 1% 以下でモニターすることは困難である。そこで、フィードバック・コイルを追加して低域遮断周波数を大幅に改善 (小さく) することを考える [6]。

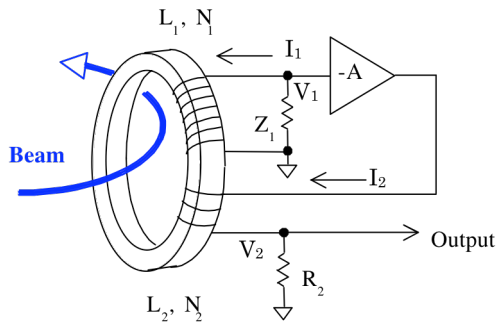


図 22：フィードバック型 CT。

コアを貫く磁場は

$$B = \frac{\mu}{2\pi r} (I_B + N_1 I_1 + N_2 I_2),$$

各部の電圧は

$$V_1 = \frac{d}{dt} (N_1 B S) = -R_1 I_1,$$

$$(-A)V_1 - V_2 = \frac{d}{dt} (N_2 B S),$$

$$V_2 = R_2 I_2.$$

インダクタンスは

$$L_1 = \frac{\mu S N_1^2}{2\pi r}, L_2 = \frac{\mu S N_2^2}{2\pi r}, M = \frac{\mu S N_1 N_2}{2\pi r}.$$

これらを使って出力電圧は、

$$V_{out} = R_2 I_2 = - \frac{j\omega (AM / R_2 + L_2 / R_2)}{1 + j\omega (AM / R_2 + L_1 / R_1 + L_2 / R_2)} \frac{R_2 I_B}{N_2}$$

となる。低域遮断周波数は、ゲイン分低くできる：

$$\omega_L = \frac{1}{AM / R_2 + L_1 / R_1 + L_2 / R_2} \approx \frac{R_2}{AM}, \quad A \gg 1.$$

KEK-PS MR では、フィードバック型 CT に時定数補償回路を追加して、2 s でのドゥループを 1% 以下に抑えた[7]。図 23、図 24 に周波数特性の計算値、測定波形を示した。

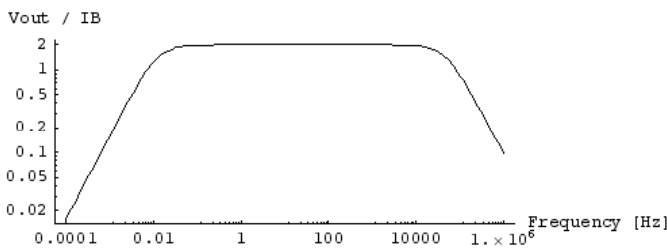


図 23: フィードバック型 CT 周波数特性(計算値)。

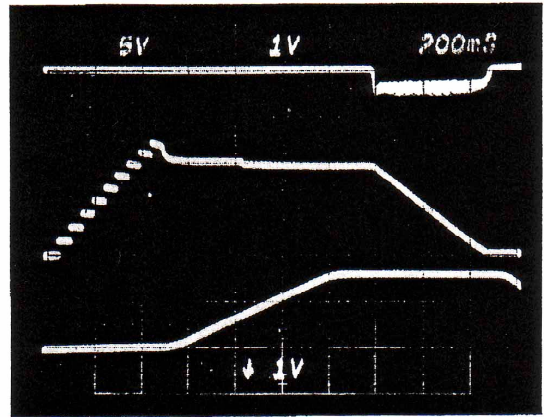


図 24：KEK-PS 12 GeV Main Ring のビーム強度（中段のトレース）。V: $2 \times 10^{12} p/div$, H: 200 ns/div。

3.1.4. DCCT (Direct-current CT)

ビームを長時間蓄える蓄積リング、衝突リングなどでは、前節の方法でもサグが問題となってしまう。そこで DC まで測定できる CT、すなわち DCCT が開発されている。現在、以下のようなものが加速器の DCCT として実用化されている：

- ① パラメトリック DCCT,
- ② 負抵抗を使った DCCT[8],
- ③ SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) を使った DCCT[9].

ここでは①を簡単に紹介する[10]。図 25 のように磁性体コアの 1 次側に励振コイルを巻き、2 次側に検出コイルを巻いた構造となっている。1 次側の 2 つのコアが十分飽和するような振幅で、逆方向に励振する。周波数は 1kHz 程度である。そこに（ビームなどの）電流が流れると、それぞれのコアには、元の励振磁場と逆方向に磁場が加わるので、飽和するタイミングに時間差が生じる。検出コイルでこの磁束変化を検出すると図 26 の $v_- - v_+$ で示されるように励振周波数の偶数次高調波を多く含む信号が得られる。この信号から励振周波数の 2 倍波を検出する。リップル除去のためのローパスフィルタ（励振周波数のおよそ 1/100 以下: 1~10 Hz）を通して出力される。応答は DC~10 Hz 程度と非常に遅いので、前節のフィ

ードバック付き CT と組み合わせて、広帯域化が図られる。

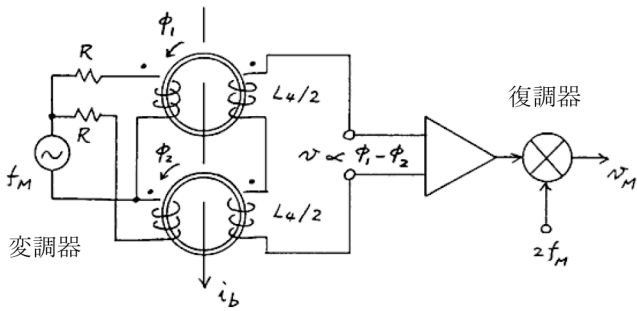


図 25 : パラメトリック DCCT[10]。

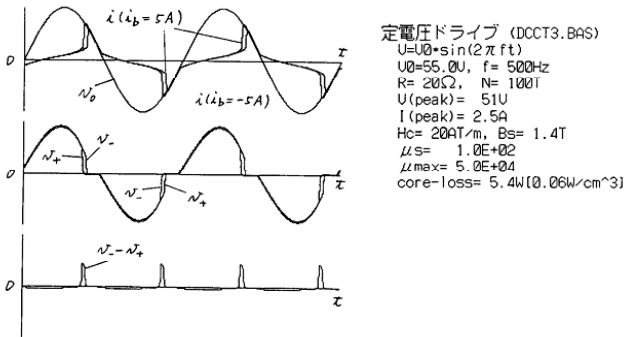


図 26 : 検出コイルに誘導される信号[10]。

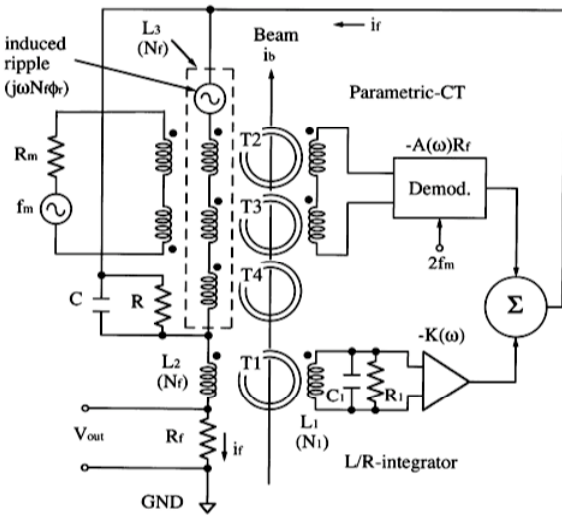


図 27 : 直列フィードバック方式 DCCT[12]。

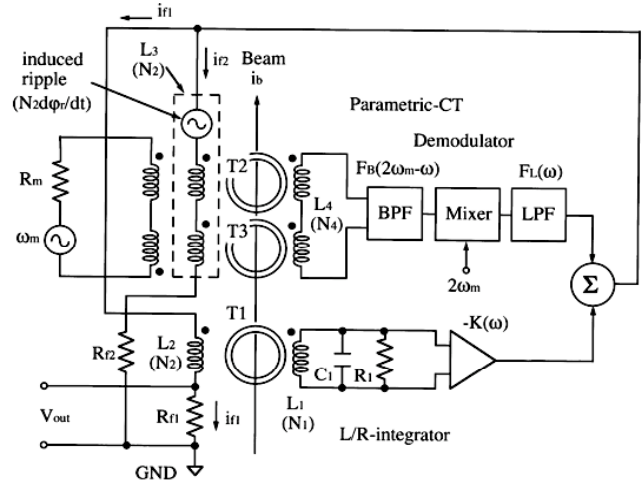


図 28 : 並列フィードバック型 DCCT[10, 11]。

パラメトリック CT とフィードバック型 CT を組み合わせた回路を図 27、図 28に示した。パラメトリック CT 部のフィードバック・コイルとフィードバック型 CT のフィードバック・コイルとが直列か並列かの違いである。直列接続では、リップル低減のためにコアの磁気特性を高い精度でバランスさせる必要があった。これを並列接続にすることで、リップル電流がフィードバック型 CT のフィードバック・コイルを流れないようにでき、無選別コアの使用でも十分な性能が実現している[10,11]。この並列フィードバック型で製作した J-PARC MR の DCCT の測定例を図 29に示す。

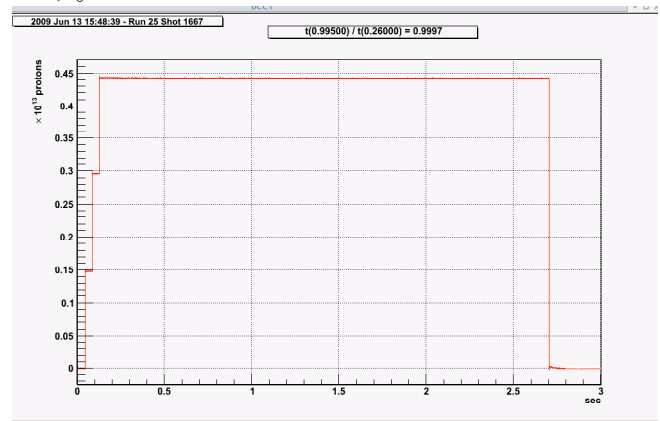


図 29 : J-PARC MR の DCCT 出力波形。

3.2. 位置の計測

ビームは真空ダクトの中を走っていく。ビームは有限な分布を持っているが、そのビーム位置とは、通常、ビームの電荷分布の重心の位置を指す。実際には色々な「位置」が知りたくなる：

- ー バンチの位置
 - バンチ毎の位置
 - 平均位置 = リングでは COD
- ー バンチ内の各時刻の位置
- ー コースティング・ビームの位置

コースティング・ビームの位置測定には、周回ビームについてはフライイング・ワイヤーモニター、残留ガスプロファイルモニターなどの準非破壊型プロファイルモニター、取出しビームについては破壊型の各種プロファイルモニターで行なうことが多い。ただし、これらのモニターについては割愛し、ここでは電磁場を検出するモニター：静電型、ストリップライン型検出器について説明する（コースティング・ビームの位置測定には使えない）。

3.2.1. 静電型検出器

ビームパイプ表面の電場 E または同じことであるが電荷 σ を検出する方法で、多方面で使われている方法である。

2.1節で見たように、ビームが相対論的の場合は2次元の静電場問題に帰着できる。静電型検出器 (electrostatic monitor) と呼ばれる所以である。そこで、線密度 λ [C/m] の線電荷が位置 (x, y) [m] にあるとする。これがダクト表面の θ の位置に誘導する電荷分布 σ [C/m²] は、式(3)から

$$\begin{aligned} \sigma(a, \theta, r, \phi) &= \frac{\lambda}{2\pi a} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \phi)} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi a} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{r}{a} \right)^n \cos n(\theta - \phi) \right] \\ &= \frac{\lambda}{2\pi a} \left[1 + 2 \left(\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{a} \sin \theta \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{x^2 - y^2}{a^2} \cos 2\theta + \frac{2xy}{a^2} \sin 2\theta \right) + \dots \right], \end{aligned} \quad (4)$$

となる。これを角度 θ で切り取って計測する。簡単のために、左右 $\theta = 0, \pi$ で幅ゼロの電極での電荷量を考える。

$$\begin{aligned} \sigma_L &= \lambda \left(1 + 2 \frac{x}{a} + 2 \frac{x^2 - y^2}{a^2} + \dots \right), \\ \sigma_R &= \lambda \left(1 - 2 \frac{x}{a} + 2 \frac{x^2 - y^2}{a^2} + \dots \right), \end{aligned}$$

なので、

$$\frac{\sigma_L - \sigma_R}{\sigma_L + \sigma_R} \approx \frac{2x/a}{1 + 2x^2/a^2} \approx 2 \frac{x}{a} \left(1 - 2 \frac{x^2 - y^2}{a^2} \right) \approx 2 \frac{x}{a},$$

を計算することにより位置を得ることができる。実際には、図 31 のような形状の電極を配置する。

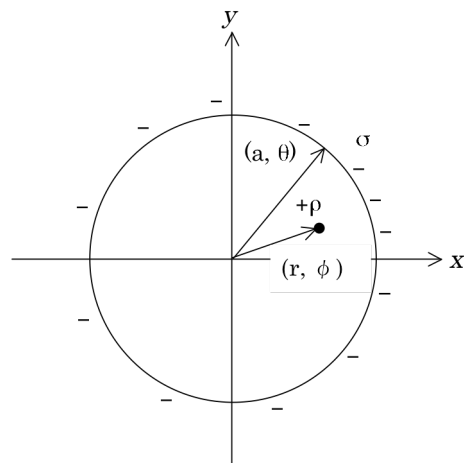


図 30：円筒パイプ中のビームによる誘導電荷。

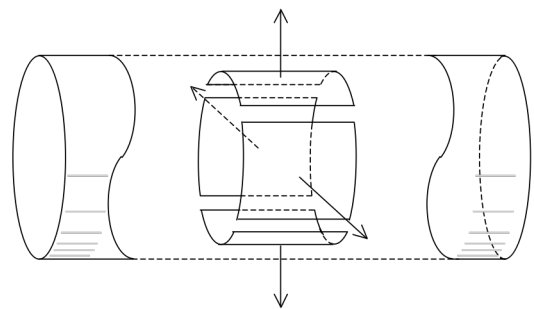


図 31：平行分割電極。

精度良く位置を測定するためには、高次の非線形効果が無視できない。ビームサイズの小さい電子、陽電子リングなどでは、前もってワイヤー校正によって、あるいは計算によって対応関係を求めておいて、測定時にそのマッピングデータを用いることが行なわれる。

しかし、ビームサイズの大きい加速器（例えば J-PARC RCS, MR, …）では、この非線形効果が無視できなくなる。ビーム断面形状は、運転パラメータ、リングの場所（ β 関数が変わる）、エネルギー、水平面か垂直面かで変わる。それらによる位置測定値のズレの大きさは、J-PARC のリングの場合、数 $100 \mu\text{m}$ になる。位置精度 $100 \mu\text{m}$ 以下を目指す J-PARC では位置応答に非線形特性が出ない方法を採用した。

真空パイプに誘導される電荷の分布は、式 (4) のようにフーリエ展開の形になっている。このうちの $\cos \theta$, $\sin \theta$ の項の係数のみを取出せればよい。今 z 軸方向の電荷分布に変化は無いとしているので（2次元モデル）、電荷を切り取る方法として z 軸方向に $\cos \theta$ または $\sin \theta$ の依存性をもってすればよい。図 32 に示したように、横軸を $a\theta$ 、縦軸を z にとると、これは真空パイプの展開図である。斜線部分の誘導電荷を切り取ることを考える。

$$\begin{aligned}
 Q_L &= \int_0^{2\pi} a d\theta \int_{-\ell/2}^{\ell/2 \cos \theta} \sigma(a, \theta, r, \phi) dz \\
 &= \int_0^{2\pi} a d\theta \frac{\ell}{2} (\cos \theta + 1) \sigma(a, \theta, r, \phi) \\
 &= \frac{\lambda \ell}{2} \left(1 + \frac{x}{a} \right), \\
 Q_R &= \int_0^{2\pi} a d\theta \int_{\ell/2 \cos \theta}^{\ell/2} \sigma(a, \theta, r, \phi) dz \\
 &= \int_0^{2\pi} a d\theta \frac{\ell}{2} (1 - \cos \theta) \sigma(a, \theta, r, \phi) \\
 &= \frac{\lambda \ell}{2} \left(1 - \frac{x}{a} \right).
 \end{aligned}$$

それぞれの差と和の比をとると、位置を得る：

$$\frac{Q_L - Q_R}{Q_L + Q_R} \approx \frac{x}{a}.$$

垂直方向も、電極を z 軸まわりに 90 度回転してやれば

$$\frac{Q_U - Q_D}{Q_U + Q_D} \approx \frac{y}{a},$$

を得る。

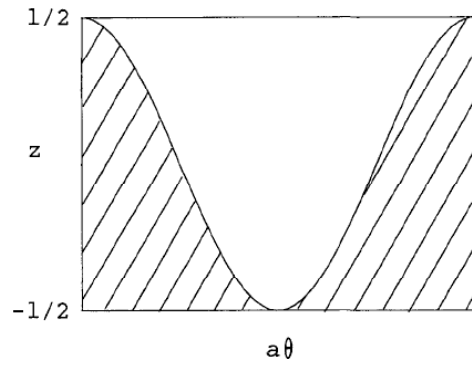


図 32：真空パイプ表面の電荷の切り取り方。

この電極の 3 次元空間での形状は、図 33 のように対角線カットである。

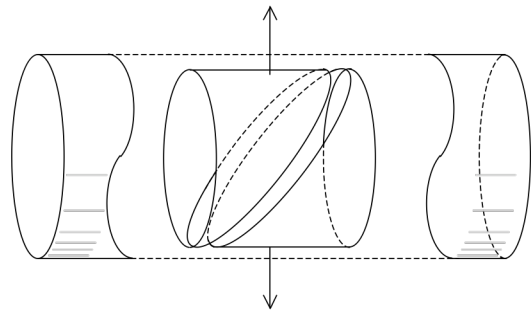
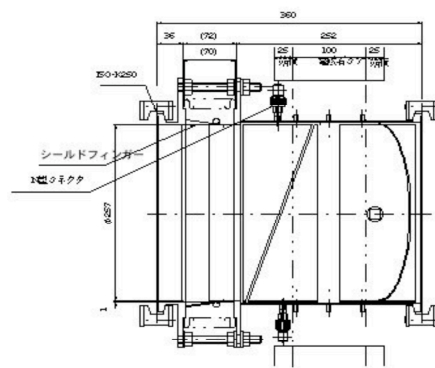
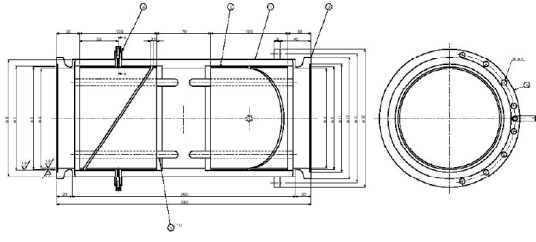


図 33：対角線カット電極。

J-PARC RCS および MR の BPM の設計を図 34 に示す。大きさはほぼスケールする。RCS BPM の内径がおおよそ $\phi 260 \text{ mm}$ 、MR BPM ではおおよそ $\phi 130 \text{ mm}$ である。



(a) RCS BPM



(b) MR BPM

図 34 : J-PARC Ring の BPM。

位置の線形性が実現できる電極としてはいくつかのものがある。図 35 に 1 例を挙げる[13]。一般的に、任意断面形状でも、対角線カットにより分割された 2 電極はビーム位置に対して線形応答をもつことが示される。

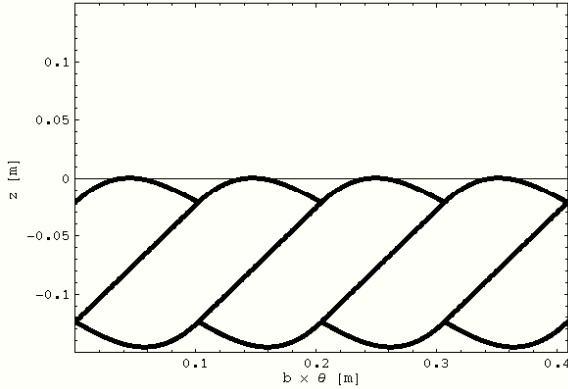


図 35 : 位置の線形応答のある電極。上半分は $\theta = 0 \sim 2\pi$ を覆う“べた”電極、位置計算の分母として使う。

時間領域での応答は、以下の様になる[14]。各電極の電位 V_i 、電流 I_i を、各電極の静電容量 q_{ii} ・誘導係数 q_{ij} ($i \neq j$) の定義式を時間微分することにより、

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix}_C = j\omega \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix},$$

を得る。下付き添字 C は静電容量を流れる電流の意。負荷抵抗 R についてのオームの法則、およびビームによって電極に誘導される電荷の時間微分が電流であることから、以下の式を得る。

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix}_R = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix}_C + \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix}_R = j\omega \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

ここで ω は角周波数、 I は誘導電荷である。電流を消去して各電極のビームによる誘導電荷と出力電圧のみの式

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = j\omega \left\{ j\omega \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix} + \frac{I}{R} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix},$$

が得られる。 I は単位行列である。右辺の $(\dots)^{-1}$ は逆行列の意。各電極に誘導される電荷は、円筒対角線分割の場合には以下のように考えられる：

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x}{a} \\ 1 - \frac{x}{a} \\ 1 + \frac{y}{a} \\ 1 - \frac{y}{a} \end{pmatrix} I_B \frac{g\ell}{v},$$

a : inner radius of the electrode
 I_B : beam current
 $g \cong 0.5$: geometrical factor
 ℓ : electrode length
 v : speed of the beam

従って、各電極の出力電圧が、ビーム位置 (x, y) および周波数の関数として得られる：

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = j\omega \left\{ j\omega \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix} + \frac{I}{R} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} 1 + \frac{x}{a} \\ 1 - \frac{x}{a} \\ 1 + \frac{y}{a} \\ 1 - \frac{y}{a} \end{pmatrix} I_B \frac{g\ell}{v}.$$

図 36 に、2 電極ペアのみ抜き出したときの等価回路を描いた。

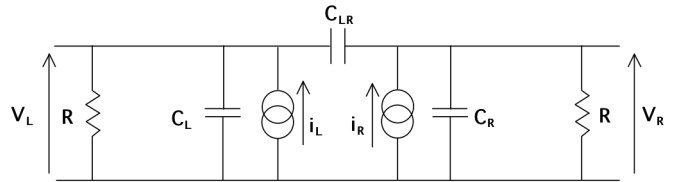


図 36 : 2 電極ペアのときの等価回路。

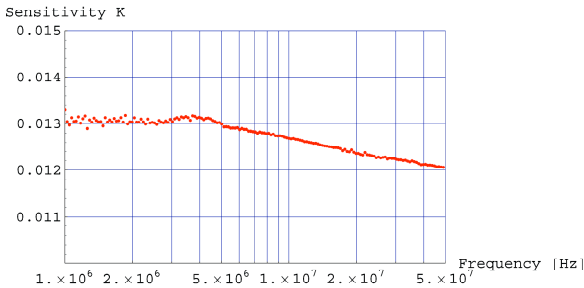
上記のモデルを J-PARC MR の BPM に適用した例をしめす。内半径 $a=130/2$ mm を使い、対角線分割部分と単純円筒部の比を 0.171 として補正を加えた。 q_{ij} (容量係数、誘電係数) としては、

Network analyzer による測定値を使った。Port1, Port2 (50Ω系) を4電極のうち2つに繋ぎ、他のポートを50Ωで終端した。その配置で散乱行列を測定し、さらに $[q_{ij}]$ に変換した結果、以下の値を得た。単位は pF である。

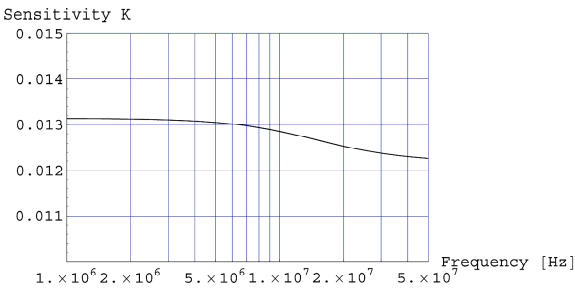
$$(q_{ij}) = \begin{pmatrix} 197.535 & -7.457 & -0.004 & -0.018 \\ -7.457 & 205.356 & -0.020 & -0.066 \\ -0.004 & -0.020 & 207.689 & -7.301 \\ -0.018 & -0.066 & -7.301 & 210.604 \end{pmatrix}$$

ワイヤー法を使った位置感度の測定値と上記の式による計算値を図 37 に示す。良い一致が得られている。出力電圧の低域遮断周波数 (@-3dB) : 約 16.5 MHz の一致も良かった。

静電型 BPM の応答特性は、後述のストリップライン BPM の低周波極限としても得られる。



(a) ワイヤー法による測定値.



(b) 上記のモデルによる計算値.

図 37 : BPM 検出器の位置感度の周波数特性。

以下、いくつかの問題点に言及しておく。上記の導出では系を2次元で考えている。

まず、ビームが z 軸に平行でない場合どうなるか。二次元モデルの枠内で見積もりを行なう。ビーム位置 (x, y) が z 方向の依存性

$$x = x_0 + x'z + y'z,$$

$$y = y_0 + x'z + y'z,$$

を持つとする。左電極に誘導される電荷量は

$$Q_L = \int_0^{2\pi} a d\theta \int_{-\ell/2}^{\ell/2 \cos \theta} \sigma(a, \theta, r, \phi) dz$$

$$= \int_0^{2\pi} a d\theta \int_{-\ell/2}^{\ell/2 \cos \theta} dz \frac{\lambda}{2\pi a} \left[1 + 2 \left(\frac{x + x'z + y'z}{a} \cos \theta + \frac{y + x'z + y'z}{a} \sin \theta \right) + 2 \left(\frac{(x + x'z + y'z)^2 - (y + x'z + y'z)^2}{a^2} \cos 2\theta + \frac{2(x + x'z + y'z)(y + x'z + y'z)}{a^2} \sin 2\theta \right) + \dots \right]$$

$$\approx \frac{\lambda \ell}{2} \left(1 + \frac{x}{a} \right) + \frac{\lambda \ell}{2} \cdot \frac{\ell(x' + y')}{4a} \cdot \frac{x}{a} - \frac{\lambda \ell}{2} \cdot \frac{\ell(x' + y')}{4a} \cdot \frac{y}{a}$$

Q_R についても同様にして、 x 方向 (水平方向) について、

$$\frac{\Delta}{\Sigma} \approx \frac{x}{a} + \frac{\ell(x' + y')}{4a} \cdot \frac{x}{a} - \frac{\ell(x' + y')}{4a} \cdot \frac{y}{a},$$

を得る。 y 方向も同様である。例えば、 $a = 65 \text{ mm}$, $\ell = 100 \text{ mm}$, $x' = 2 \text{ mrad}$ で、相対誤差 0.08 % である。また y の位置が x の測定に影響する。

次に、真空パイプに段差がある場合どうなるか。簡単な例として円筒パイプに同軸の段差がある場合を考察する[15]。図 38 のような形状を考える。段差近くで z 依存性の電荷分布が生じる (図 39)。

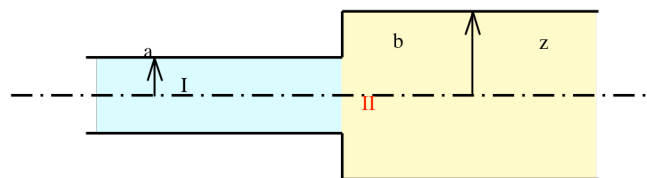


図 38 : 真空パイプに段差がある場合。

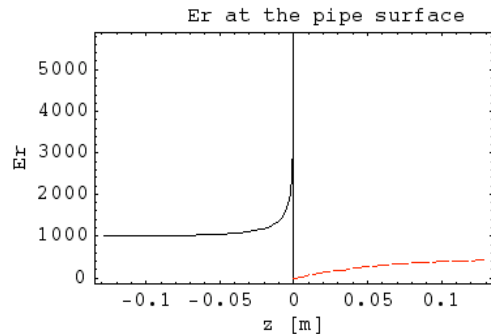


図 39 : パイプ表面電荷 ($\propto E_r$)。

ビームが z 軸上を走る場合、すなわち中心にある場合、切り取る電荷は

$$Q_+ = \int_0^{2\pi} a d\theta \int_{z_2(\theta)}^{z_1(\theta)} dz \sigma(a, \theta, r, \phi, z)$$

$$= \int_0^{2\pi} a d\theta \int_{-\ell/2+z_0}^{(\ell/2)\cos\theta+z_0} dz \sigma(a, 0, 0, 0, z),$$

$$Q_- = \int_0^{2\pi} a d\theta \int_{z_2(\theta)}^{z_1(\theta)} dz \sigma(a, \theta, r, \phi, z)$$

$$= \int_0^{2\pi} a d\theta \int_{(\ell/2)\cos\theta+z_0}^{\ell/2+z_0} dz \sigma(a, 0, 0, 0, z),$$

とかける。誤差分を含めて

$$Q_+ = Q_0 + \Delta Q_+,$$

$$Q_- = Q_0 + \Delta Q_-,$$

$$Q_0 = \lambda \frac{\ell}{2},$$

とかくと、

$$\Delta Q_+$$

$$= 2\pi b \epsilon_0 \sum_{q=0}^{\infty} F_q \frac{\gamma_q b}{z_q} J_0(z_q) \frac{I_0(\gamma_q \ell/2) e^{-\gamma_q z_0} - e^{-\gamma_q(z_0 - \ell/2)}}{\gamma_q},$$

$$\Delta Q_-$$

$$= 2\pi b \epsilon_0 \sum_{q=0}^{\infty} F_q \frac{\gamma_q b}{z_q} J_0(z_q) \frac{e^{-\gamma_q(\ell/2+z_0)} - I_0(\gamma_q \ell/2) e^{-\gamma_q z_0}}{\gamma_q},$$

になる。ここで、 F_q は Field matching の境界条件によって定まる展開係数である。

J-PARC MR では、入射・取出し部の、大きなアパーチャが必要な部分でこの問題が生じている。10 mm 前後の系統的オフセット誤差が生じている。段差の解消が根本的対策になるが、隣接する BPM で相互校正することもできる。

3.2.2. ストリップライン検出器[16]

ストリップライン (stripline) とは、一般的には、表裏面に導体箔を形成した板状誘電体基板の内部に線状の導体箔を形成した構造を持ち電磁波を伝達する伝送線路である[17]。変形版として、裏面のみに導体箔を形成し、表面に線状の導体箔を形成した構造の伝送線路 (マイクロ・ストリップライン) もある (図 40)。特徴としては、分布定数回路であり基本モードは TEM 波である (カットオフ周波数以上では高次モードが発生)、高周波特性が良いのでマイクロ波回路に使われる、

複数の線路の組み合わせによって結合に方向性を持つ (→方向性結合器)。これを「ビームモニターに応用したものがストリップライン」検出器であり、上記の性質を備えている。一般的な形状は図 41 のようなものである。



図 40 : 一般的なストリップラインの断面形状。

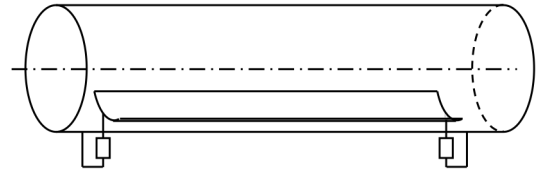


図 41 : ストリップライン BPM

図 43 に示すような PU 1 本の場合をモデル化する。ビームは光速で走っていると仮定する。2.1.1 節で見たように 2D 静電問題と考えられる。ビームの位置を (x_0, y_0) として、ビーム静止系で、点 (x, y) におけるポテンシャルは、ビーム、PU 上の線電荷密度をそれぞれ λ_0, λ_1 、電位係数を p_{10}, p_{11} とすると

$$V_1(x, y, x_0, y_0)$$

$$= p_{10}(x, y, x_0, y_0) \lambda_0(x_0, y_0) + p_{11}(x, y) \lambda_1,$$

と書ける。実験室系に移ると、TEM 波の性質から電場、磁場は[16]

$$\mathbf{E}_\tau = -\nabla_\tau V_1 e^{\mp jk_0 z}$$

$$= \begin{cases} -\nabla_\tau (p_{10} \lambda_{0+} + p_{11} \lambda_{1+}) e^{-jk_0 z} \\ -\nabla_\tau (p_{11} \lambda_{1-}) e^{+jk_0 z} \end{cases}$$

$$\mathbf{H}_\tau = \pm Y_0 \hat{z} \times \nabla_\tau V_1 e^{\mp jk_0 z}$$

$$= \begin{cases} +Y_0 \hat{z} \times \nabla_\tau (p_{10} \lambda_{0+} + p_{11} \lambda_{1+}) e^{-jk_0 z} \\ -Y_0 \hat{z} \times \nabla_\tau (p_{11} \lambda_{1-}) e^{+jk_0 z} \end{cases}$$

ここで $Y_0 = \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0}$, ∇_τ は横方向の gradient である。ビームダクト表面から PU 表面までの線積分によって PU の電位が求められる。

$$V_{1\pm} e^{\mp jk_0 z} = \begin{cases} (p_{10}\lambda_{0+} + p_{11}\lambda_{1+}) e^{-jk_0 z} \\ p_{11}\lambda_{1-} e^{+jk_0 z} \end{cases} \quad (1)$$

また、PU を流れる電流は、磁場の接線成分を PU 断面を囲む線に沿って積分して得られる。ビームからの寄与 (p_{10}) はゼロで、PU 自身の寄与 (p_{11}) のみが残ることがわかる。

$$I_{1\pm} e^{\mp jk_0 z} = \oint_C \mathbf{H}_\tau \cdot d\mathbf{s} = \pm c\lambda_{1\pm} e^{\mp jk_0 z}. \quad (2)$$

$V_{1+}, V_{1-}, I_{1+}, I_{1-}$ を一意的に定めるためには境界条件が必要である。上流端、下流端にてそれぞれ R_0, R_ℓ で終端された場合を考える：

$$\begin{aligned} V_{1+} + V_{1-} &= -R_0(I_{1+} + I_{1-}), \\ V_{1+} e^{-jk_0 \ell} + V_{1-} e^{jk_0 \ell} &= R_\ell(I_{1+} e^{-jk_0 \ell} + I_{1-} e^{jk_0 \ell}). \end{aligned}$$

上流端、下流端での電圧を求めると、それぞれ $V_1(0) = V_{1+} + V_{1-}$

$$\begin{aligned} &= \frac{cp_{10}R_0(p_{11} + cR_\ell) \sin(k_0 \ell) \lambda_0}{-jcp_{11}(R_0 + R_\ell) \cos(k_0 \ell) + (p_{11}^2 + c^2 R_0 R_\ell) \sin(k_0 \ell)} \\ V_1(\ell) &= V_{1+} e^{-jk_0 \ell} + V_{1-} e^{+jk_0 \ell} \\ &= \frac{-2jcp_{10}(p_{11} - cR_0)R_2 \sin(k_0 \ell) \lambda_0}{-(p_{11} - cR_0)(p_{11} - cR_\ell) + e^{2jk_0 \ell} (p_{11} + cR_0)(p_{11} + cR_\ell)} \end{aligned}$$

となる。 $Z_c = p_{11}/c = 1/cC_1$ (C_1 は静電容量) を考慮すると、 $p_{11} - cR_0 = c(Z_c - R_0)$ となり、上流端でインピーダンス整合した場合は下流端で出力が無いことがわかる。

電圧、電流が満たす方程式を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dz} + j\omega L_1 I_1 &= -j \frac{k_0 p_{10}}{c^2} I_0 e^{-jk_0 z} \\ \frac{dI_1}{dz} + j\omega C_1 V_1 &= j \frac{k_0 p_{10}}{cZ_c} I_0 e^{-jk_0 z} \end{aligned}$$

を得る。 $I_0 = c\lambda_0$, $p_{11} = 1/C_1$, $Z_c = cL_1 = 1/cC_1$ を使った。

PU に発生する電圧は、上記の通り、電圧は、ビーム電荷に誘導される部分 (V_i) と、PU 上の電荷、電流による部分 (V_s) からなる。これを使って方程式を書き直すと

$$\begin{aligned} \frac{dV_{1s}}{dz} + j\omega L_1 I_1 &= 0 \\ \frac{dI_1}{dz} + j\omega C_1 V_{1s} &= 0 \end{aligned}$$

となる。ビームの影響は境界条件のみに現れる。

$$V_{1s}(0) = -V_{1i}(0) - R_0 I_1(0),$$

$$V_{1s}(\ell) = -V_{1i}(\ell) + R_\ell I_1(\ell).$$

電圧源を等価電流源に置き換えれば、良く使われる等価回路が得られる。

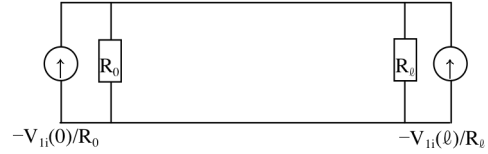


図 42：等価回路。

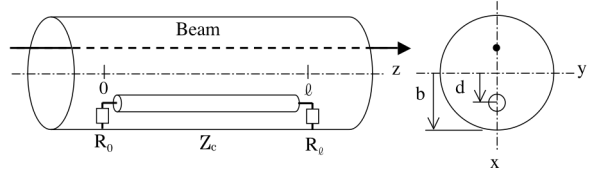


図 43：ストリップライン・ピックアップの 1 例。

具体的に図 43 について計算してみる。 p_{10}, p_{11} は Green の相反定理、鏡像法、等角写像あるいは境界要素法などの数値計算によって求めることができる。

$$\begin{aligned} p_{10}(x, y, d, 0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \text{Log} \frac{(x-d_2)^2 + y^2}{(x-d-d_1)^2 + y^2} - 2 \text{Log} \frac{d_2-b}{b-d-d_1} \right\}, \\ p_{11}(d, 0) &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cosh^{-1} \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2ab} \end{aligned}$$

ただし、

$$d_1(d_2 - d) = a^2, \quad (d + d_1)d_2 = b^2,$$

である。

(例 1) PU の特性インピーダンス 50Ω 、両端末で整合している場合

$a=1.5\text{mm}$, $b=67\text{mm}$, $d=65\text{mm}$, $Z_c=50 \Omega$, $\ell=180\text{mm}$

とする。ビームが z 軸上にある場合を考える。電位係数はそれぞれ

$$\begin{aligned} p_{10}(0, 0, d, 0) &= 3.88 \times 10^8 \\ p_{11}(d, 0) &= 1.50 \times 10^{10} \end{aligned}$$

となる。Transfer impedance ($Z_{//} = V_1(0)/I_0$) を求めた結果を図 2 に示す。それを [Shafer], [Barry] の計算式

$$Z_{up}(\omega) = jZ_c \frac{\phi}{2\pi} e^{-j\theta} \sin\theta$$

$$|Z_{Barry}(\omega)| = \frac{\mu_0 c}{2\pi Z_c} \text{Log}\left(\frac{b}{d}\right) R_0 |\sin\theta|$$

$$\theta = \omega\ell/c$$

に代入した結果も示した。[Shafer]は円筒面の一部を切り取った形状の電極を仮定している。[Barry]は太さゼロのワイヤーを仮定している。例1の形状は、どちらによっても近似が悪いため、図44の結果になったと考えられる。

(例2) PUの特性インピーダンス202Ω、下流端末でショートしている場合(J-PARC MRに設置した"Single Pass Monitor (SPM)"のパラメータ) a=1.5mm, b=92mm, d=67mm, Zc=202Ω, ℓ=180mmとする。電位係数はそれぞれ

$$p_{10}(0,0,d,0) = 5.70 \times 10^9$$

$$p_{11}(d,0) = 6.05 \times 10^{10}$$

となる。Transfer impedanceを求めると図45のようになる。それを[Barry]の計算式

$$|Z_{Barry}(\omega)| = \frac{\mu_0 c}{2\pi Z_c} \text{Log}\left(\frac{b}{d}\right) R_0 |\sin\theta| \sqrt{\left(\frac{R_0}{Z_c}\right)^2 \cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

に代入した結果も示した。この場合、[Barry]の太さゼロのワイヤーの近似が良いと考えられる。また、低周波特性ではJ-PARC MRのSPMのワイヤー校正データと良く合っている。

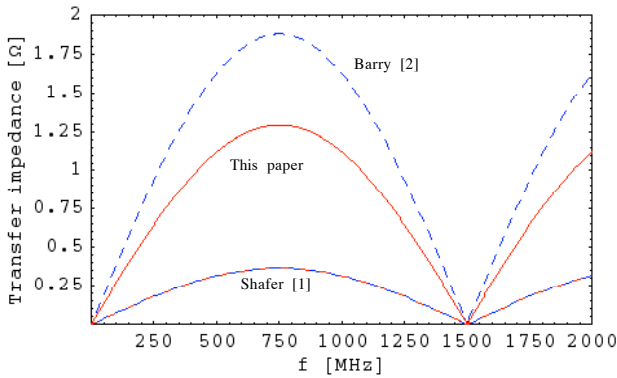


図44：例1の断面の場合の transfer impedanceの周波数特性。

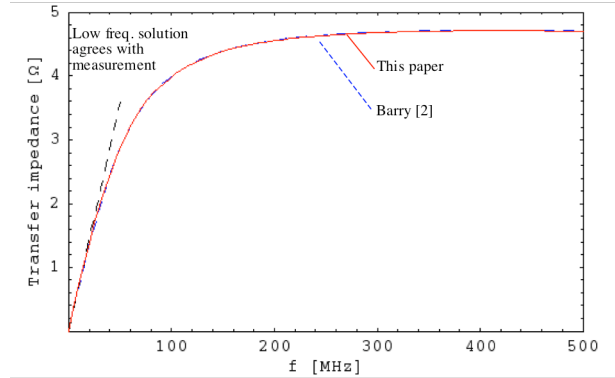


図45：例2の断面の場合の transfer impedanceの周波数特性。

3.3. ベンチ校正

ビーム計測に先立って、ビームモニターの特性を把握することは重要である。以下に典型的な方法を列挙する。

3.3.1. CTの校正

同軸構造の中心導体の良導体ワイヤーあるいはパイプに電流を流し、リターン電流は外部導体を流すことで、ビーム電流を模擬することが一般的に行なわれている。系が集中定数と見なせる程度の低い周波数の測定では、CTコア内にワイヤー（小さい電源で電流値を大きくする必要がある場合には複数ターン）を通すのみで良い。また、途中のケーブル、処理回路の影響を込みで校正することが必要になる。オンラインで校正するようにしたFeedback付きCTの構成を図46に示す。

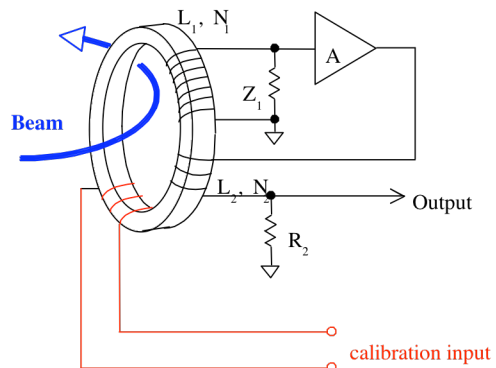
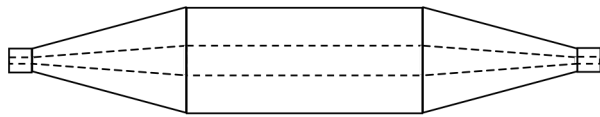
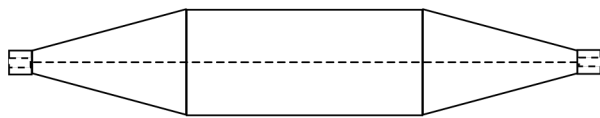


図46：SCTの校正用巻線。

高周波まで校正する場合には、測定装置からの信号(大抵、特性インピーダンス 50Ω となっている)が反射しないようにするために、「テーパー管」などを使用する(インピーダンス整合、impedance matching)。図 47 のような種類がある。電気的特性と使用方法を考慮して決める必要がある。



(a) 内導体と外導体の径の比を一定に保つ場合。



(b) 内導体径一定、外導体径はテーパー。

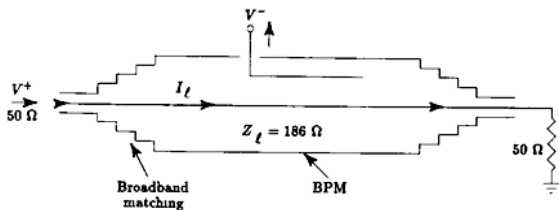


Fig. 8. Wire technique for measuring BPM impedance.

(c) "multiple quarter wavelength section transformer"[16]

図 47 : テーパー同軸伝送線路。

J-PARC MR の CT, WCM のベンチ校正は図 48 のような構成で行なった。結果を図 49~54 にしめす。

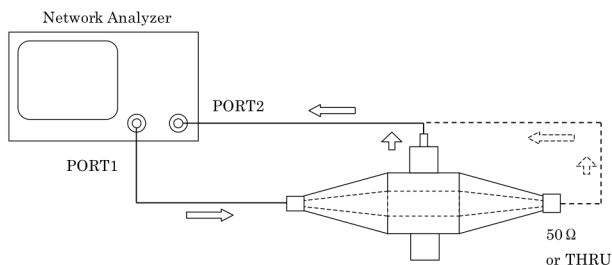


図 48 : CT のベンチ測定系。

テーパー管の部分には実際は、端板のみ、多重 $\lambda/4$ 管、またはテーパー管にて行なった。

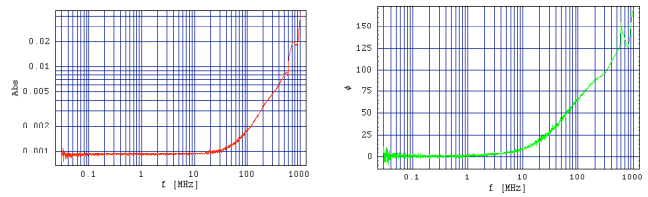


図 49 : WCM の周波数特性。

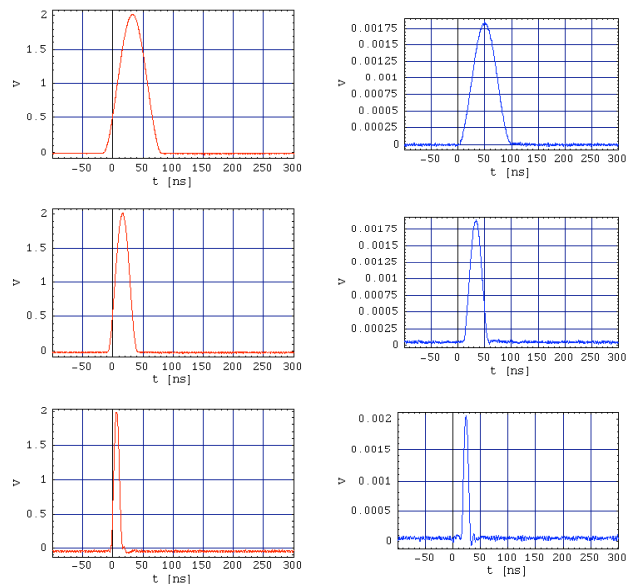


図 50 : ベンチ校正, 時間領域の信号波形。赤線 : 入力信号、青線 : WCM 出力信号。



図 51 : 同軸変換器による WCM ベンチ校正。

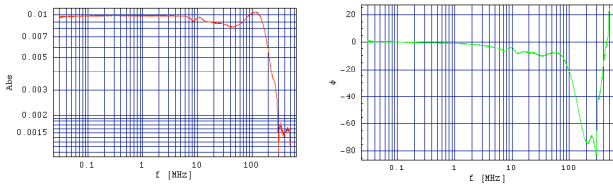


図 52 : CT の周波数特性。

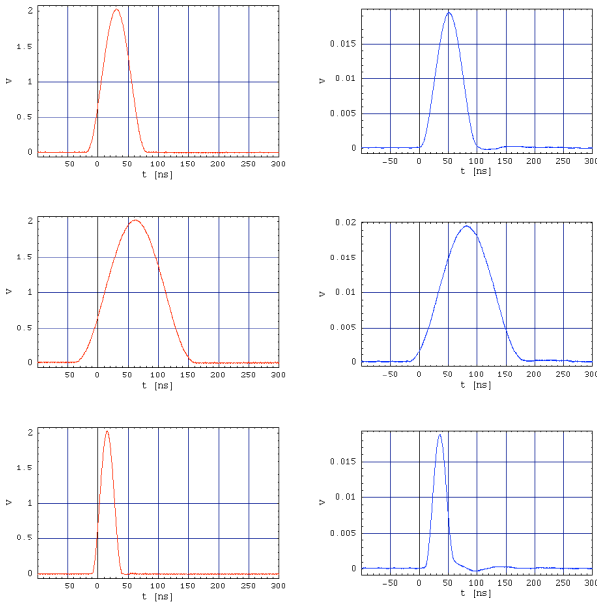


図 53 : ベンチ校正, 時間領域の信号波形。赤線 : 入力信号、CT の出力 : CT 出力波形。

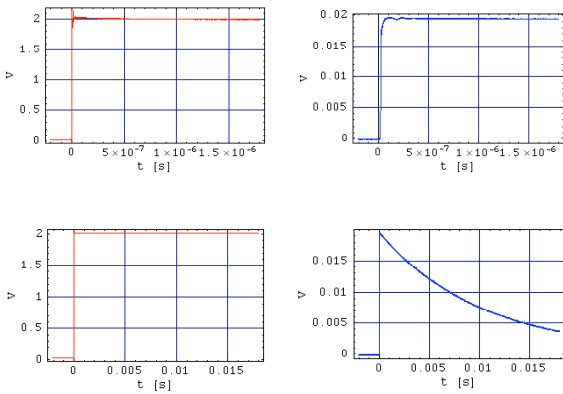


図 54 : ステップ応答。

低域遮断周波数がネットワークアナライザの周波数範囲に入らないこともある。J-PARC では、ステップ応答 (十分長い矩形波を入力) のサグか

ら求めた。ベンチ校正では、高周波遮断周波数 : 約 150 MHz @ -3 dB、サグ : $\tau = 9.81 \text{ ms}$ 、低域遮断周波数 : $f_L = 1/2\pi\tau = 16 \text{ Hz}$ であった。

3.3.2. BPM の校正

BPM のベンチ校正では、位置感度係数、オフセット値を求める。ビームの代わりに z 軸に平行に張られた 1 本のワイヤーに電気信号を入力し、BPM からの出力を測定する。ワイヤーを上下左右 (x, y 軸方向) に移動するか、ワイヤーを固定して BPM を移動して行なわれる。図 55 に J-PARC MR の例をしめす。

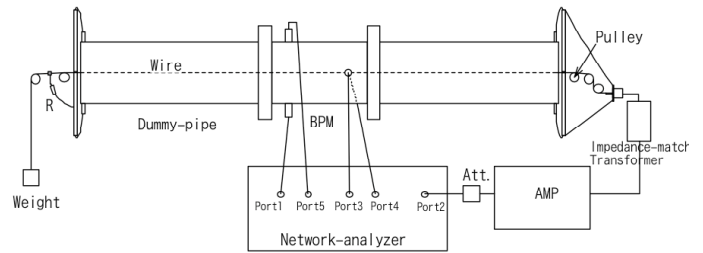


図 55 : BPM のワイヤー校正のセットアップ。

一方、ビームとワイヤーは、それぞれ、電荷・電流ソース、(ほぼ完全) 導体境界であり、似て非なるものである。理論的に精密に設計した BPM を基準器としてこれとの比較校正を行なう方法、ワイヤーによるベンチ校正は検出器の出来具合の確認にとどめて BPM の校正は後述のビームベース校正によるという方向も考えられている。

後述の結合インピーダンスのワイヤーによるベンチ測定とも並んで、従来から便利であるということで行なわれているが、原理的に正当性を証明する「標準理論」は無いのが実情であると思われる。ここでは、簡単に静電モデルを使って、ビームとワイヤー法による比較検討を試みる。

低周波極限(DC)の場合ワイヤーにたいする応答は以下の様に考えられる。

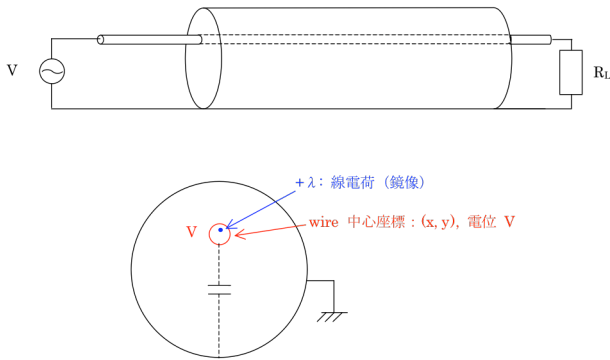


図 56 : ワイヤ校正。

図 56 のように、電圧源が接続されているとする。この場合、ワイヤー表面に誘導される電荷は λ [C/m] となる。この電荷量 λ は、ワイヤー-ビームダクト間の静電容量 $C_w(x, y)$ を使って、

$$\lambda = C_w(x, y)V,$$

$$C_w = \frac{2\pi\epsilon_0}{\cosh^{-1}\left(\frac{r_w^2 + a^2 - (x^2 + y^2)}{2r_w a}\right)},$$

と書くことができる。従って、各電極の出力は、ワイヤー法による場合は、例えば

$$L(x, y) = g_L \lambda \left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

$$= g_L V \frac{1 + \frac{x}{a}}{\cosh^{-1}\left(\frac{r_w^2 + a^2 - (x^2 + y^2)}{2r_w a}\right)},$$

のように書くことができる (g_L は left 電極の gain factor)。図 57 にワイヤー校正の結果と上記の式によるフィッティング結果を示す。非常に良く合っている。実際のビームでは係数 C_w がないと予想される。また、 Δ/Σ の計算をすると、 C_w の係数はほぼ相殺し結果にはほとんど影響しないと考えられる。

ワイヤー校正を行なう上での注意点を列挙する (J-PARC の経験より) :

①ワイヤー (アンテナ) の太さ

ワイヤーの電気的中心と機械的中心は、ずれるので、ずれが問題無い程度の太さのワイヤーを用いる [18]。

②定在波が立たないようにする

特に対角線分割の BPM は、 z 軸方向分布に不均一があると誤った出力をする。3.2.1 節の段差の効果と同様の原理による。所望の精度の範囲になるようにインピーダンス整合をする。

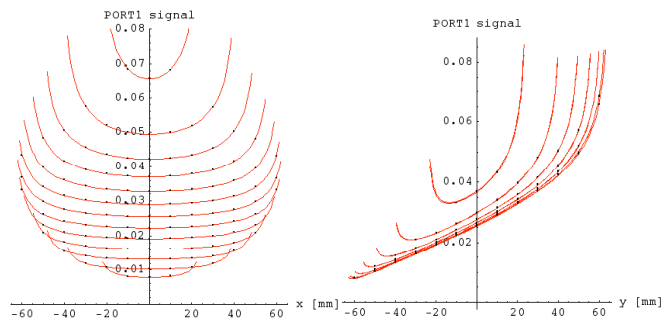


図 57 : 電極毎の出力信号 vs ワイヤ位置。

測定は、図 55 に示したようなセットアップでおこなった。BPM 本体を、 x, y 位置精度 $\pm 50 \mu\text{m}$ 以内の移動架台に載せて移動した [19]。測定精度を確保するためにネットワーク・アナライザを使用した。J-PARC MR の BPM の校正結果の例を図 58、図 59 に示す。

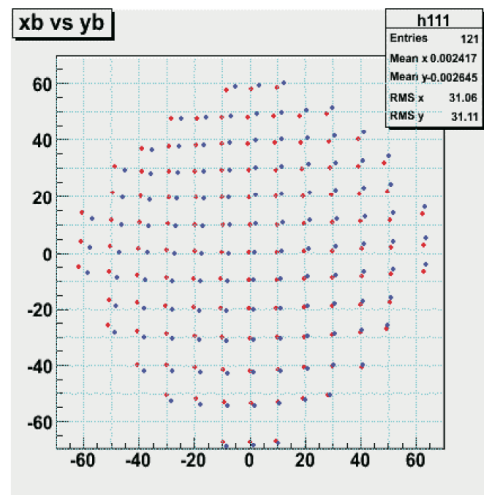


図 58 : J-PARC MR BPM の校正結果。青点 : 測定結果、赤点 : オフセット、回転補正後のデータ点。

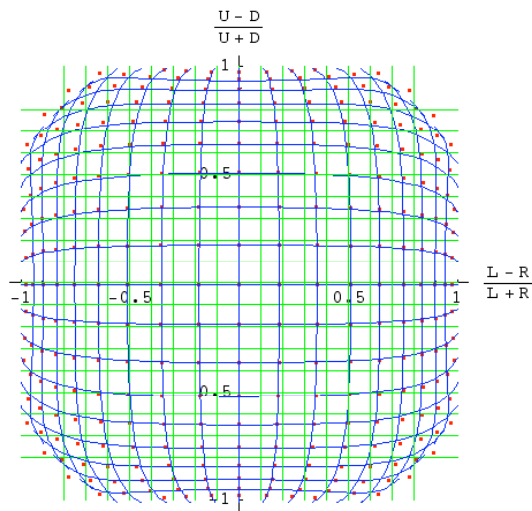


図 59 : J-PRC 3-50BT BPM の校正結果。赤点 : 測定結果、青線 : フィッティング。

3.4. ビームベース校正

上記のようにワイヤーによるベンチ校正をおこなっても、加速器の現場での設置誤差、ケーブルでの減衰、処理回路でのゲイン・オフセット誤差、検出器・ケーブル・処理回路間の定在波が、BPM の測定結果に誤差を持ち込む。

ここでは、BPM の性能をビーム自身の信号に基づいて決定する方法を述べる。

3.4.1. 位置分解能 (3BPM 相関法)

同一のビームが、近傍に設置された 3 つの BPM を通過することに着目して、BPM の分解能を評価できる。3カ所に 1,2,3 と番号を付けると、それぞれの場所での位置 x 、傾き x' は、途中で非線形磁場が無い場合は

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix},$$

で結びつけられる。測定できる量 x_1, x_2, x_3 のみの関係式をつくると

$$x_3 = -\frac{n_{12}}{m_{12}} x_1 + \frac{m_{12}n_{11} + m_{22}n_{12}}{m_{12}} x_2,$$

を得る。さらに、BPM のオフセット誤差、ダイポールキック (偏向電磁石の誤差磁場、ステアリ

ング電磁石の励磁、Q 電磁石のオフセットからくるキック) があると

$$x_3 = -\frac{n_{12}}{m_{12}} x_1 + \frac{m_{12}n_{11} + m_{22}n_{12}}{m_{12}} x_2 + C,$$

のように追加の項 C が加わる[18]。軌道の時間的変動要因が上記の BPM 3 台の外部にあるとすれば、観測結果の時間的変動は BPM システムの信号のバラツキからくるもの、すなわち BPM 分解能の寄与のみである。従って

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \frac{\sum_{n=1}^N \left\{ x_{3n} - (Ax_{1n} + Bx_{2n} + C) \right\}^2}{1 + A^2 + B^2}},$$

より BPM の分解能が得られる。

3.4.2. オフセット

Beam based alignment と呼ばれている方法で、以下のように 4 極電磁石の磁場中心と BPM の電氣的中心のオフセットを、基本的には加速器ラティスのモデルに依存しないで求める方法である。加速器全体から見ると、"alignment" は電磁石の設置アラインメントを連想してしまう。「どうやって電磁石のアラインメントをできるんだ」と質問を受けた経験は、著者のみではなさそうである。BPM の alignment という主旨である。

原理は以下の通りである。まず、BPM が 4 極電磁石内あるいは近傍に設置されているとする。ビームが 4 極電磁石の中心を通るとき、ビーム重心はキックを受けない。従って 4 極電磁石の強さをビームがロスしない範囲で変化させても、軌道に変化は見られない。一方、ビームが 4 極電磁石の中心からズレていると 4 極電磁石の強さによって軌道が変わる。そこで、軌道に変化の見られない時の BPM の位置測定値が BPM のオフセットとなる。LINAC の場合は 1 回通過のビーム、リングでは閉軌道 (COD) だが、基本的には同様である。

J-PARC MR の例を図 60 に示す。(a)~(c) では、各バンプ軌道で、4 極電磁石の電流値を変えて BPM#89 での COD 測定をおこなった結果を示している。各バンプ軌道毎に $\partial x / \partial I_Q$ を算出し、BPM#89 位置と $\partial x / \partial I_Q$ をプロットしたのが (d) である。 $\partial x / \partial I_Q = 0$ の x がオフセットである。

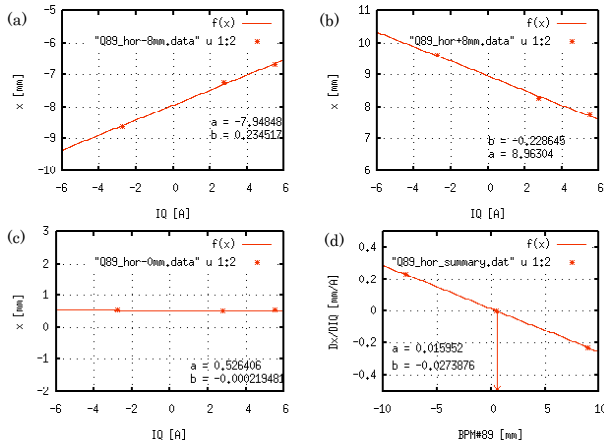


図 60 : BPM の Beam based alignment.

4. 結合インピーダンス計測 [5]

ビームが真空パイプ中を走るとき、2.1節で述べたように周りに電磁場を伴っている。完全導体の様なパイプであれば問題無いが、実際の加速器では、真空パイプの内側に、段差・テーパ、ビーム計測機器、RF 加速空洞/空洞、マグネット、セプタム電極などが存在する。また、真空パイプ自体が有限の抵抗をもった導体である。具体例として、真空パイプに段差がある場合、ビームが走る軸上に進行 (z 軸) 方向に電場が出来る (図 61)。

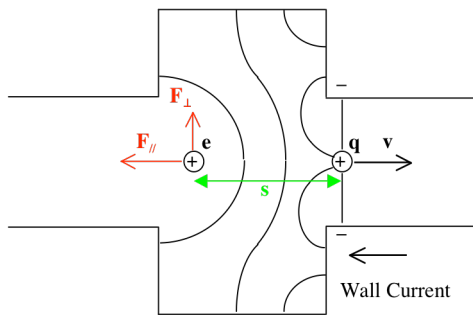


図 61 : 真空パイプ段差のウェーク場。

先行する荷電粒子は、距離 s 後ろを走るテスト粒子に力を与える。これをビーム軸に沿って積分したものが、ビームの受け取る運動量で、ウェークポテンシャルと呼ばれる。これのフーリエ変換が結合インピーダンスである。以下に関係式をまとめる。

縦方向、横方向のウェークポテンシャル $W(s)$:

$$\bar{F}_{//} = \int_{-L/2}^{L/2} F_{//} ds = -eqW_{//}(s),$$

$$\bar{F}_{\perp} = \int_{-L/2}^{L/2} F_{\perp} ds = -eqyW_{\perp}(s),$$

とそのディメンション :

$$[W_{//}] = [V/C],$$

$$[W_{\perp}] = [V/Cm].$$

縦方向、横方向の結合インピーダンス $Z(s)$:

$$Z_{//} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{c} e^{-i\omega z/c} W_{//}(s),$$

$$Z_{\perp} = \frac{i}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{c} e^{-i\omega z/c} W_{\perp}(s),$$

とそのディメンション :

$$[Z_{//}] = [\Omega],$$

$$[Z_{\perp}] = [\Omega/m].$$

ウェークポテンシャル、結合インピーダンスの例を以下に示す。

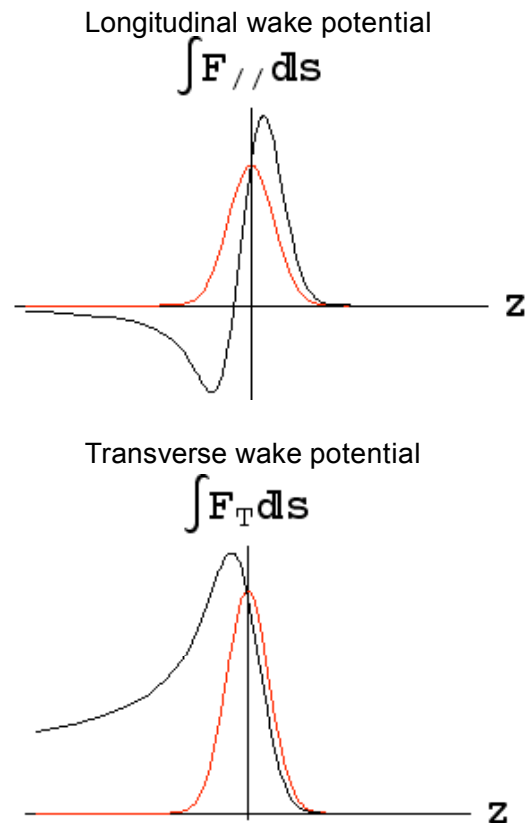


図 62 : 抵抗性壁 (resistive wall) のウェーク・ポテンシャル。赤線 : ビーム・バンチ、黒線 : ウェークポテンシャル。

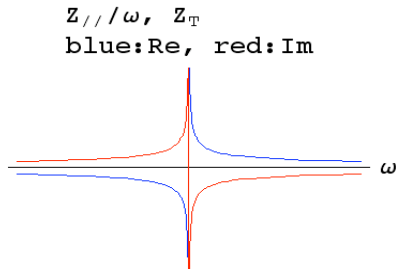


図 63 : 抵抗性壁の結合インピーダンス。

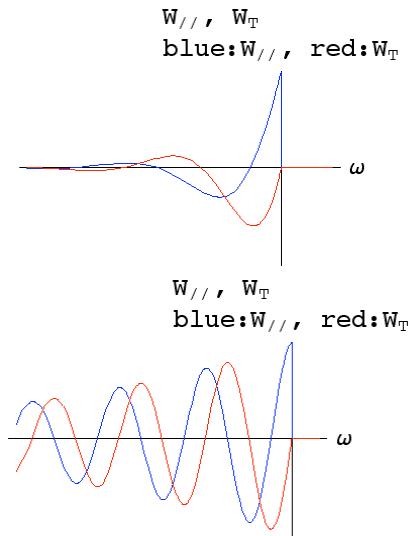


図 64 : 空洞のウェーク・ポテンシャル。上図 : Q=1、下図 : Q=10。

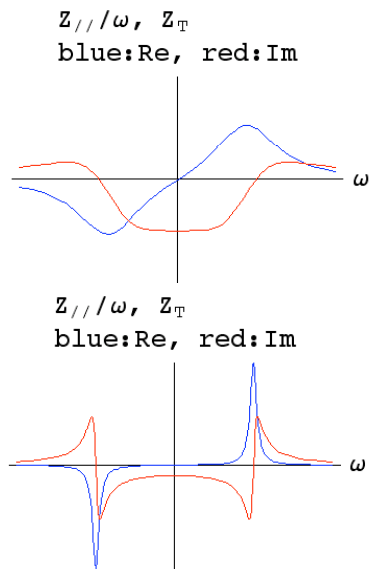


図 65 : 空洞の結合インピーダンス。上図 : Q=1、下図 : Q=10。

これらのウェーク場はビームを不安定にして、ビームサイズを拡げたり、ビームロスを引き起こしたり、ルミノシティを悪化させたりする。不安定発生の流れは概略以下のようなものである。

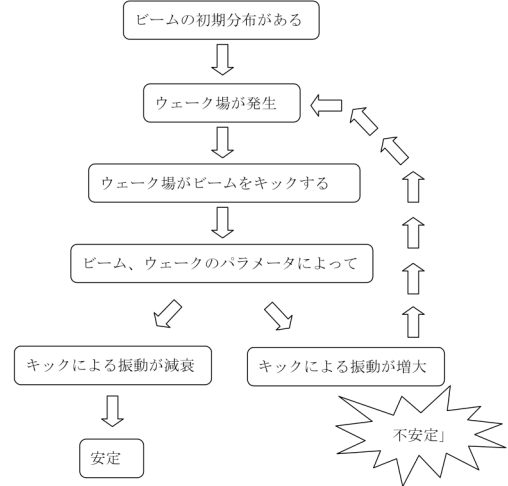


図 66 : ビーム不安定の発生。

このような不安定性が起こらないように下記のような対策をするのが、最近（約 1980 年代以降建設）の加速器の定石になってきている。

- ①事前に加速器の結合インピーダンスを評価しておき、必要なものについては結合インピーダンスの改善をおこなう。=インピーダンス・バジェット (impedance budget) の作成
- ②不安定性評価の結果、安定性の確保できない instability については、別途対策を講じる : feedback dampers, Landau damping 用 nonlinear magnets etc.

上記の、事前の結合インピーダンス評価が本節の主題である。コンピュータによる電磁界シミュレーションが発達した今日では、3次元シミュレーションにより結合インピーダンスを求めることが出来るが、キッカーや加速 RF 空洞のような複雑な形状・性質の磁性体、立体的に配線された導体などから構成される機器の結合インピーダンスのシミュレーションには困難を伴う。実機の改良のプロセスで、セットアップの変更、あるコンポーネントの脱着などが、結合インピーダンスにどう影響するのかを即座に検証する方法も望

まれる。そのようなわけで、各種の結合インピーダンスのベンチ測定が長年おこなわれてきている。ここでは比較的 Q 値の低い機器に適するワイヤを使う方法を紹介する。

4.1. 縦方向インピーダンスのベンチ測定[20]

ビームパイプの中心に細い金属ワイヤを張って、同軸構造を形成する。ここを伝搬する電磁波はカットオフ周波数以下では TEM 波のみである。これは光速で走るビームに伴う電磁波に近い。ワイヤの径が無限小になる極限（同軸構造の特性インピーダンス $Z_c \rightarrow \infty$ ）では正しい値を与えると考えられるが、実際には可能な範囲で細いワイヤを選択する。この方法では、縦方向の結合インピーダンスを測定する。

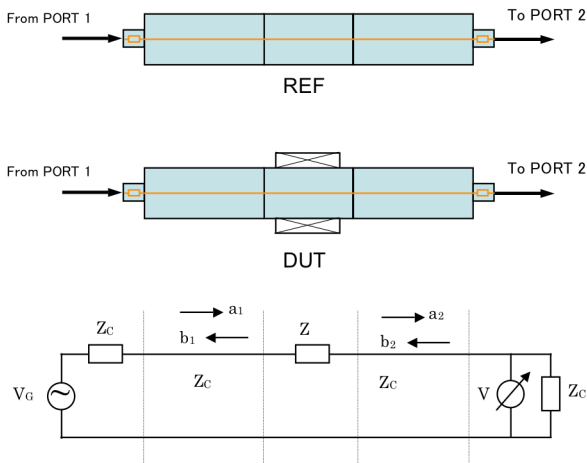


図 67：縦方向インピーダンス測定。同軸ワイヤ法。

測定は、精度の観点からベクトル・ネットワークアナライザを用いておこなわれる。測定対象 (DUT, Device under test) が局在するインピーダンス Z の場合、透過係数 (S_{21}) を測定し、

$$Z = 2Z_C \frac{1 - S_{21}}{S_{21}},$$

により Z を得る。通常は、レファレンス・パイプの透過係数 ($S_{21,REF}$) と、DUT の透過係数 ($S_{21,DUT}$) の測定をおこない、

$$Z = 2Z_C \frac{1 - S_{21,N}}{S_{21,N}},$$

$$S_{21,N} = \frac{S_{21,DUT}}{S_{21,REF}},$$

から Z を求める。

DUT が集中定数と見なせない場合は、 Z が小さいとして求められた、

$$Z = -2Z_C \ln \left(\frac{S_{21,DUT}}{S_{21,REF}} \right),$$

を用いる。

4.2. 横方向インピーダンスのベンチ測定[20]

2本の金属ワイヤを平行に張って、ビームの横方向ダイポール・モードを模擬するものである。2本の金属ワイヤとビームパイプは "shielded pair" 伝送線路を形成する。この系には even(++)モードと odd(+-)モードが伝搬できるが、ビームの横方向ダイポール・モードを模擬するのは odd モードのみである。ネットワークアナライザのポート 1 からの信号を odd モードに整合させるため、高周波数帯域のハイブリッドが使用される。これは低周波では技術的に困難なので、J-PARC ではマルチポート・ネットワークアナライザを使用している。

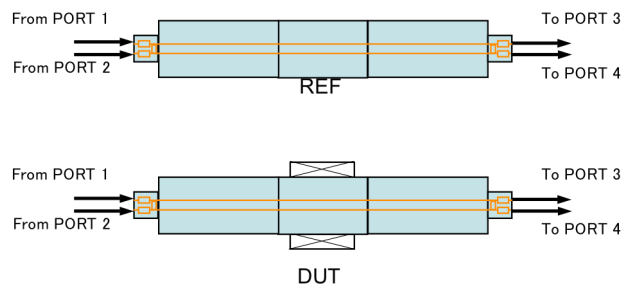


図 68：横方向インピーダンス測定。2本のワイヤを張って odd mode の透過係数を求める。

DUT のインピーダンス Z は、 S_{21} を odd モードの透過係数として、前節の式から求められる。その Z をもちいて、 Δ をワイヤ間距離として、

$$Z_{\perp} = \frac{cZ}{\omega\Delta^2}, \quad (5)$$

により横方向インピーダンスが得られる。

キッカーの横方向インピーダンスは、大きなインピーダンス源の候補であるが、低周波特性の測定は、透過信号の SN が悪いため上記の方法では困難である。J-PARC では、低周波に限るという前提で、片端をショートし反射係数 (S_{11}) により測

定をおこなっている (図 69) [20]。ショートされたペア線はコイルと見なせる。 S_{11} 測定はコイルのインダクタンスの測定になっている。DUT があると吸収、位相変位が起きるため、DUT の寄与は REF 測定でのインダクタンスからのズレとして観測される。

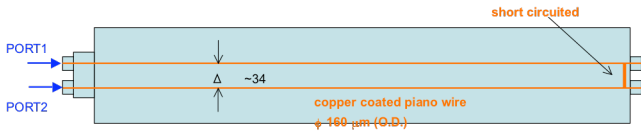


図 69 : S_{11} による測定 (片端ショート)。

$$Z_{in,REF} = Z_C \frac{1 + S_{11,REF}}{1 - S_{11,REF}}, \quad Z_{in,DUT} = Z_C \frac{1 + S_{11,DUT}}{1 - S_{11,DUT}},$$

$$\Delta Z_{in} = Z_{in,DUT} - Z_{in,REF},$$

$$Z = \frac{\Delta Z_{in}}{\ell},$$

として、式 (5) に代入して横方向インピーダンスを求める。

長さ ℓ , 特性インピーダンス Z_C のペア伝送線路を $z=\ell$ でショートして、 $z=0$ から見たインピーダンスは

$$Z_{in} = Z_C \frac{1 - e^{-2j\omega\ell/c}}{1 + e^{-2j\omega\ell/c}}$$

$$\approx Z_C \left(j \frac{\omega\ell}{c} + j \left(\frac{\omega\ell}{c} \right)^3 / 3 + \dots \right).$$

これは、括弧内の第 2 項以降が無視できる時、

$$Z_{in} \approx j\omega L\ell$$

より、インダクタンスと見なせる。上記の条件を満たさない場合、誤差が大きくなる。

J-PARC RCS の取出しキッカーの例を紹介する。このキッカーは伝送線路型である。通常の伝送線路型キッカーは、一方の端部から電流を導入し、他方の端部で終端をする。しかし本キッカーは片端ショートで電流を倍増させる設計となっている[21]。図 70、図 71 に全系と回路図を示す。このキッカーについて、ショートしたペア伝送線路で横方向インピーダンス測定をおこなった結果を図 72 に示す[22]。

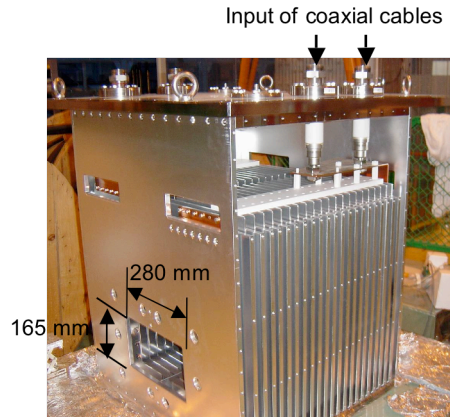


図 70 : RCS 取出しキッカー (プロトタイプ)。

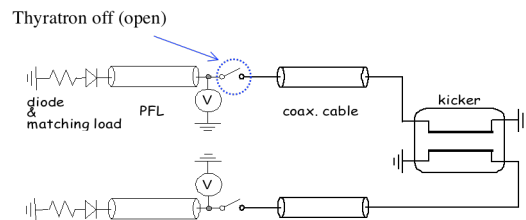


図 71 : RCS 取出しキッカーの構成。

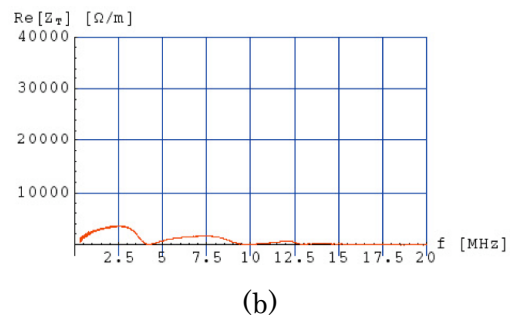
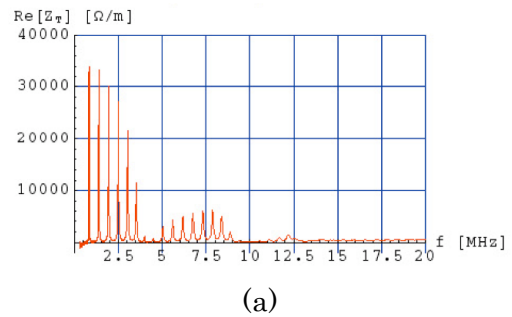


図 72 : J-PARC RCS 取出しキッカー。横方向 (水平方向) インピーダンス (実数部)。(a) キッカー片端ショート、片端ケーブル (開放)、(b) キッカー片端ショート、片端インピーダンス整合。

5. ビーム不安定性の計測

5.1. ビーム不安定性の観測

ビームの集団不安定性の出現は、まずビームモニターでのコヒーレント信号の増大として観測される。ここでは、KEK-PS での観測を主な例として紹介する。

5.1.1. 縦方向 (longitudinal)

縦方向のビーム不安定性には、

- ①ロビンソン不安定性
- ②結合バンチ不安定性
- ③マイクロウェーブ不安定性
- ④ネガティブマス不安定性

などがあるが、ここでは、KEK-PS MR の位相遷移 (phase-transition, γ_T) 付近で見られたマイクロウェーブ不安定性の紹介をする [23]。

そもその発端は、位相遷移での激しいビームロスがビーム強度の増強を制限する要因の 1 つであったことである (図 73)。

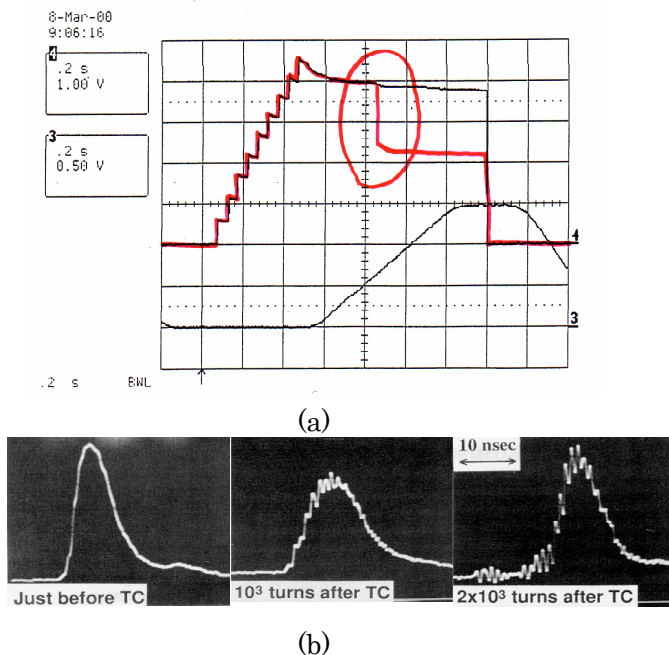


図 73 : KEK-PS MR で観測されたマイクロウェーブ不安定性 : (a)フィードバック付き CT によるビーム強度の測定。赤線がロスのあるショット。バラツキが大きい。(b)WCM で測定したバンチ波形。

上記のように高周波の成分をもつ不安定性を観測するためには、測定器の周波数帯域を認識しておかなければならない。この例では $f < 2\text{GHz}$ である。

インピーダンス源が調査され、ビームパイプの段差と BPM の構造が主たるものだと思われた。MAFIA および同軸管によるベンチ測定により、それぞれの結合インピーダンスが評価された。表 1 に BPM、CVC (caviti-like vacuum chamber : 排気ポート付きチェンバー) の評価結果を示す。

Resonant Impedance(measurement/calculation)				
	$\omega_r/2\pi$	Q	R_{shunt}	R/Q
	(GHz)		(Ω)	(Ω)
BPM	0.636/0.667	77/2650	$1.5 \times 10^3 / 2.6 \times 10^4$	19.4/9.8
	/1.13	/3769	$/6.2 \times 10^4$	/16.3
	1.498/1.377	230/8222	$5.3 \times 10^3 / 3.3 \times 10^3$	23/40
CVC	/1.44	/4846	$/1.4 \times 10^5$	/28.8
	/1.84	/4048	$/1.9 \times 10^5$	/46.6

表 1 : インピーダンス評価の結果。

これを基にした不安定性のシミュレーションが、WCM を使った縦方向エミッタンス測定の結果 (図 74) を良く再現したことから、上記のストーリーは正しいと考えられた。図 74 には、約 2/3 の BPM と真空排気ポートを対策を施したものに交換した後の測定結果もプロットされている。残った不安定性は、縦方向エミッタンスを増大させ、ビームの線電荷密度を減らして、不安定性を抑制した [24]。

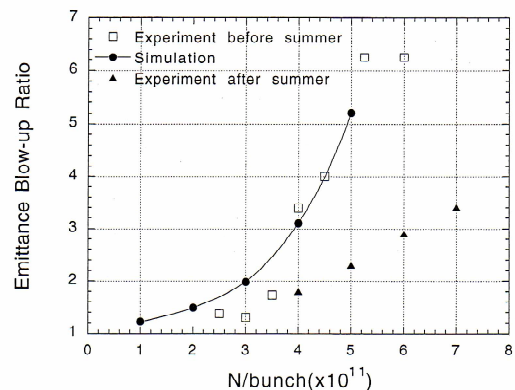


図 74 : 縦方向エミッタンス増大。

5.1.2. 横方向 (transverse)

横方向のビーム不安定性には、

- ①ロビンソン不安定性
- ②結合バンチ不安定性
- ③ヘッドテイル不安定性

④横方向モード結合不安定性 (長バンチでは起きにくい)

⑤電子雲不安定性

などがあるが、ここでは、KEK-PS MR の入射フラットボトムおよび加速開始付近で見られた水平方向ヘッドテイル不安定性の紹介をする[25]。

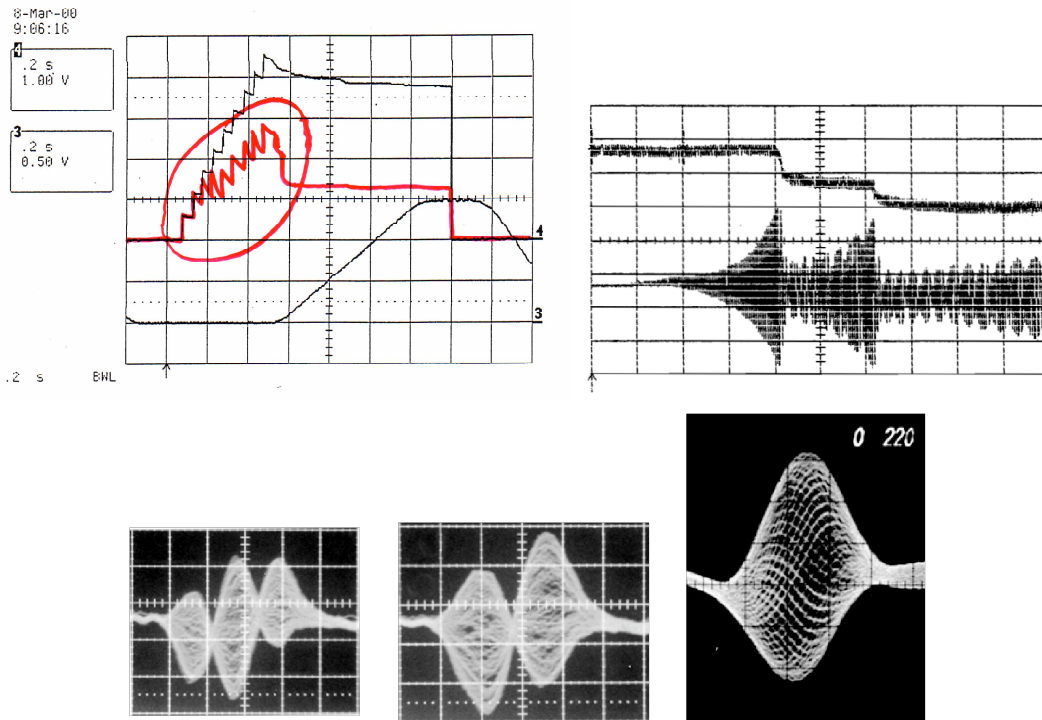


図 75 : KEK-PS MR のヘッドテイル不安定性。

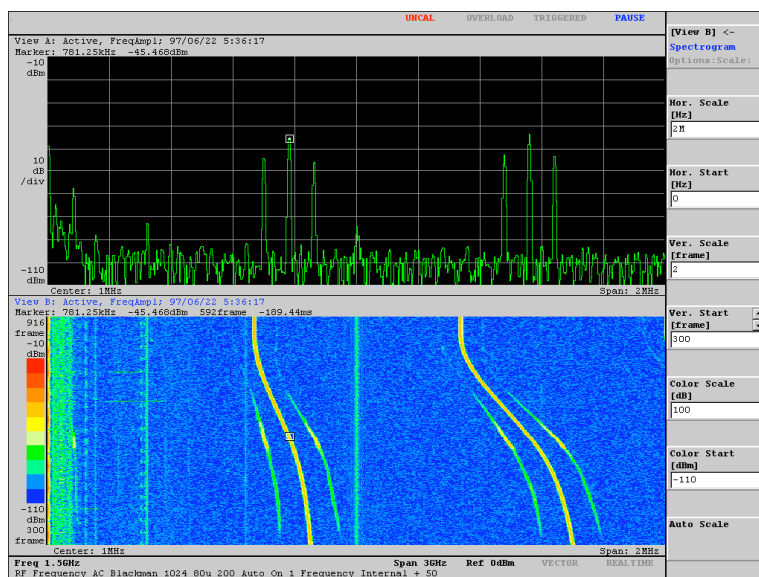


図 76 : 加速中の BPM 水平方向 Δ 信号の周波数スペクトル。途中ベータトロンサイドバンドが発生。

図 75、図 76に示したのは、KEK-PS MR の入射フラットボトムおよび加速初期に観測された水平方向ヘッドテイル不安定性である。ビーム強度の低下と不安定性の発生が同時に観測されている。BPM の水平方向 Δ 信号を、RF クロックを分周したトリガで重ね書きしたものは、ヘッドテイル不安定性の典型的な挙動を示している。右から節の数が 0、1、2 のモードである。モード 0 は、位相遷移 (γ_T) 以下のエネルギーでは、クロマチシティが正で不安定になる。水平方向クロマチシティの測定の結果、ちょうどモード 0 の増大が激しくなるタイミング: 加速開始 (P2) から 80ms 付近で、正值になっていた。クロマチシティが図 77 のように時間と共に大きく変化するのは主に偏向電磁石のビームパイプに誘導された渦電流による 6 極磁場によることが計算、実測でわかった。6 極電磁石により水平方向クロマチシティを負値にもっていったところ、かなり安定化された。またインピーダンスモデルによる不安定性の増大率も実験と良く一致した。しかし、入射フラットボトムのロスが発生したため 8 極電磁石のランダウ減衰により安定化した。

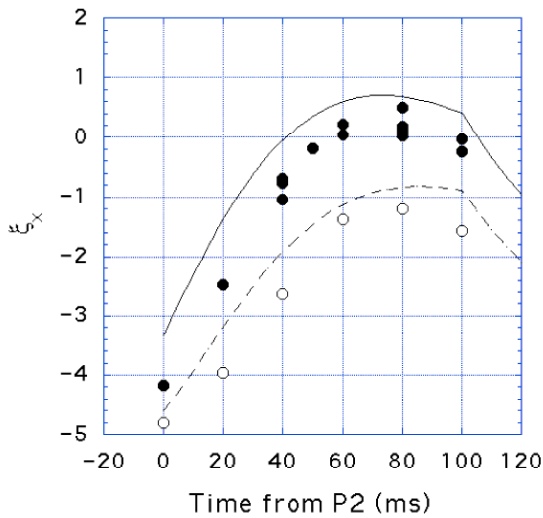


図 77: クロマチシティの測定。

黒丸: 6 極変更前、白丸: 6 極変更後、実線: 6 極変更前の計算値、破線: 6 極変更後の計算値

CERN PS では、さらに高次のモード (4,5,6,7,8,10) まで観測されている [26]。安定化は、

8 極電磁石、フィードバック・ダンパーに加えて、xy カップリングを使って、水平方向の不安定性を、垂直方向の安定性で安定化する研究もなされている [26]。

6. ビーム不安定性の安定化

ひとたびビーム不安定性が現れて、エミッタンスが増大したり、ビームロスが発生すると、加速器の性能は著しく劣化してしまう。そのため、不安定性の安定化は非常に重要である。上記でもいくつかの安定化の手法に触れたが、ここでは、横方向フィードバック・ダンパーを紹介する。

不安定性によって起こるコヒーレント・ベータトロン振動を BPM (ピックアップ) によって測定し、その振動を減らすようにキッカーで蹴ってやるものである。フィードバック系の周波数帯域は、B ファクトリー、放射光リングなどで採用されているものは、結合バンチ不安定性をダンプするために 250MHz までの広帯域のものである [27, 28]。

6.1. フィードバック・ダンパー

BPM (ピックアップ) ではビーム重心位置 x_{PU} を検出し、キッカーでゲイン倍された信号 $k x_{PU}$ でキック $\Delta x' = -k x_{PU}$ を与える。効率よくダンプするには、この描像では、ピックアップからダンパーまでベータトロン位相の進みが $\pi/2$ の奇数倍であることが条件となる。通常そのように取るには困難な場合がある。その場合は図 78 のように 2 台のピックアップを使う。

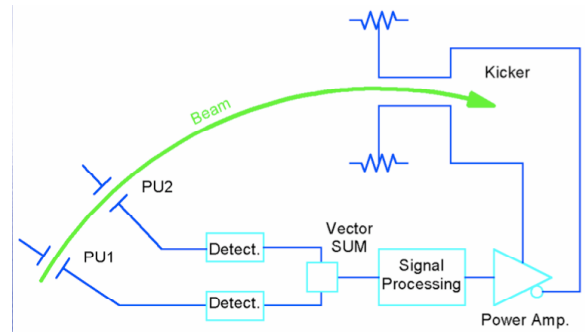


図 78: 横方向フィードバック・ダンパー [27]。

モデルを次のように考える。加速器に沿って SPU1、SPU2、SK に、順にピックアップ (BPM) "PU1",

"PU2", キッカー"K"が置かれているとする。ピックアップの測定位置 $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}(s_{PU1})$ 、 $\mathbf{x}_2=\mathbf{x}(s_{PU2})$ からキッカー $\mathbf{x}_K'=(s_K)$ へのゲインをそれぞれ k_1, k_2 とかくと、 $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ の変換は (加速器の n 周回目)、

$$\begin{pmatrix} x_{PU1} \\ x'_{PU1} \end{pmatrix}_{n+1} = \lambda_0 M(s_{PU1} | s_K) \times \left[M(s_K | s_{PU1}) \begin{pmatrix} x_{PU1} \\ x'_{PU1} \end{pmatrix}_n - \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 x_{PU1} + k_2 x_{PU2} \end{pmatrix}_n \right]$$

ここで、

$$x_2 = M(s_{PU2} | s_{PU1})_{11} x_1 + M(s_{PU2} | s_{PU1})_{12} x'_1$$

とおく。 s_1 から s_2 の変換行列:

$M(s_2 | s_1)$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} (\cos \Delta\psi + \alpha_1 \sin \Delta\psi) & \sqrt{\beta_1 \beta_2} \sin \Delta\psi \\ -\sqrt{\frac{1}{\beta_1 \beta_2}} ((1 + \alpha_1 \alpha_2) \sin \Delta\psi - (\alpha_1 - \alpha_2) \cos \Delta\psi) & \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} (\cos \Delta\psi - \alpha_2 \sin \Delta\psi) \end{pmatrix}$$

および、 $\alpha = 0$, $\beta_{PU1} = \beta_{PU2} = \beta_K = \beta$ 、ピックアップ 1 と 2 のベータトロン位相差 $\Delta\psi_{21} = \pi/2$ を仮定する。さらに、2 台のピックアップからキッカーへのフィードバック量を

$$k_1 = k_0 \cos \delta,$$

$$k_2 = k_0 \sin \delta,$$

と書く。フィードバックの最適値は、一周の変換行列の特性方程式の判別式=0 のときで、

$$k_0 = \frac{2 \sin \psi_C}{\beta \sin^2(\Delta\psi_{1K} + \delta)} \{ \cos(\Delta\psi_{1K} + \delta) \pm 1 \}.$$

その時の減衰率はリング 1 周当り

$$\lambda_+ = \lambda_- = 1 + \beta k_0 \sin(\Delta\psi_{k1} - \delta),$$

となる。 ψ_C はリング一周のベータトロン位相の進み、 $\Delta\psi_{K1}$ はピックアップからキッカーへのベータトロン位相の進みで、 $\psi_C = \Delta\psi_{1K} + \Delta\psi_{K1}$ である。この結果より、ピックアップとキッカーの位相差が $\pi/2$ でなく、いくつであっても、 δ 、すなわち k_1, k_2 の量を調整すれば最適なフィードバック量を実現できることがわかる。最近のデジタル・フィードバックでは、位置の履歴も使うことにより 1 台のピックアップで同様の性能を実現している[27, 28]。

ピックアップには、必要は周波数帯域に応じて静電型、ストリップライン型などが使われる。キッカーとしては、 50Ω の特性インピーダンスに整合をとったストリップライン型がよく使われる。ピックアップとしてのストリップラインの性能:

ビーム電流×変位あたりの信号出力 (transverse transfer impedance)

$$Z_P = \frac{V}{I_B x},$$

と、キッカーとしての性能 (transverse kicker transfer function)

$$K_{\perp} = \frac{\Delta p \beta c}{e V_K} = \frac{1}{V_K} \int e^{jks} (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_K ds,$$

との間には、Panofsky-Wenzel の定理と Lorentz の相反定理により

$$Z_P = -\frac{1}{2} j k Z_C K_{\perp},$$

の関係が成り立つ[27,28]。これから、周波数特性は図 79 のようになることがわかる。

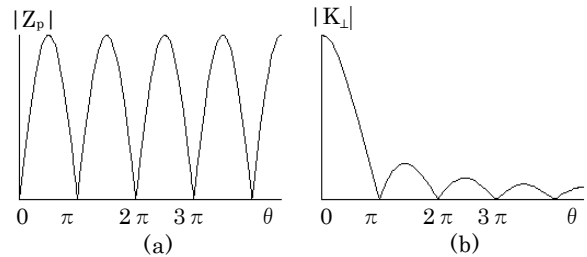


図 79: ストリップライン型ピックアップ。(a) とキッカー(b)の周波数特性。 $\theta = \omega l (1/v + 1/c)$ 。

7. おわりに

ずいぶん偏って濃淡のある内容になってしまった。以下の文献で補完していただきたい。OHO シリーズを始めとして、CERN Accelerator School (CAS), US Particle Accelerator School (USPAS, AIP proc.)などの加速器スクールの proceedings, BIW series, DIPAC series などのビーム計測専門のワークショップ proceedings、APAC, EPAC, PAC, (そして 2010 から始まる"IPAC")、加速器学会などの proceedings などを参照していただきたい。教科書も良書が出ている[10, 30]。上記文献の references には、多くの原典が掲載されているので便利である。

本講義録で掲載した成果は、参考文献に掲載された研究からの引用、あるいは共同研究で得たものである。ここで感謝する。一方、間違いや説明

不足は責任は著者に帰する。自らご確認のうえで使用していただきたい。

今回貴重な経験を与えていただいた OHO'09 校長 古屋 貴章氏、平松 成範氏に感謝します。

参考文献

- [1] J. H. Cupérus, NIM145 (1977) 219-231.
- [2] S.K.Esin, et al., "INR ACTIVITY IN DEVELOPMENT AND PRODUCTION OF BUNCH SHAPE MONITORS", Proc. of PAC1995, pp.2408-2410.
- [3] V.W. Yuan et al., "Measurement of longitudinal phase space in an accelerated H- beam using a laser-induced neutralized method", Nucl. Instr. and Meth. A329 (1993) 381-392. S. Lee et al., "Direct Measurements of space-charge-potential in High Intensity H- Beam with Laser Based Photo Neutralization Method", Proc. of DIPAC2005, 193.
- [4] R. E. Shafer, "Beam position monitor sensitivity for low-beta beams", AIP Conf.Proc.319:303-308,1994 (Proc. of the BIW93).
- [5] A.W. Chao, Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, Wiley (1993). Y.H.Chin, OHO2005, 「大強度陽子ビームの安定性」.
- [6] R. Yamada, "New Magnetic Pickup Probe for Charged Particle Beams", JJAP 1 (1962) 92.
- [7] S.Hiramatsu et al. "Beam Intensity Monitor for KEK Proton Synchrotron (in Japanese)", KEK-Report, KEK-77-21, 1978.
- [8] S. Ninomiya et al., "Dual-mode Beam Current Monitor", Proc. of EPAC2006, 2006, 1145. 厳密には DCCT とは言えないかもしれない。DC レベルが不安定なので加速器周期ごとにゼロリセットしているとの話である。
- [9] D.B. Sullivan and R.F. Dziuba, IEEE Trans. Instrum. Meas. IM-23 (1974) 256. 田辺 徹美, 品田 恵, 「貯蔵リングにおけるビーム電流の高感度測定」, 日本物理學會誌 54(1), (1999), pp.34-40. 渡辺 環, 加速器学会 2009, 「高温超伝導電流センサーと SQUID を用いたビーム電流モニターの実用化」.
- [10] 平松成範, 「加速器のビームモニター」 文部科学省高 エネルギー加速器研究機構 平成 15 年度技術部職員 専門研修.
- [11] M. Arinaga, S. Hiramatsu et al. NIM, A499(2003)100-137.
- [12] K.B. Unser, "Beam current transformer with DC ro 200 MHz range", IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-16, June 1969, pp.934-938.
- [13] G. Nassibian, "The Measurement of the Multipole Coefficients of a Cylindrical Charge Distribution", SI/NOTE EL/70-13.
- [14] T. Toyama et al., Proc. of 14th Symp. Accel. Sci. and Tec., (2003) 470 (Japanese).
- [15] J. H. Cupérus, NIM145 (1977) 233-243. 外山毅他, 「J-PARC MR BPM の運転経験」, 加速器学会 (2009).
- [16] R. E. Shafer, IEEE NS-32 (1985) 1933. W. Barry, NIM A301(1991)407-416. 外山毅, 「ストリップライン ピックアップの多導体伝送線路モデル」, 加速器学会 (2009).
- [17] R.E. Collin, "Foundations for Microwave Engineering", McGraw-Hill, Inc. (1992) ISBN 0-07-011811-6.
- [18] 諏訪田 剛, 「ビーム計測 I」 OHO200.
- [19] 花村 幸篤 他, 「J-PARC 50GEV シンクロトロン BPM 校正装置開発」第 3 回加速器学会プロシーディングス(2006), 466. 橋本 義徳 他, 「J-PARC MR BPM の校正データの解析」, 第 4 回加速器学会プロシーディングス(2007), 300.
- [20] F. Caspers, "Bench measurements", in the Handbook of accelerator physics and engineering, eds.: Alex Chao, M. Tigner, p.574. G. Nassibian and F. Sacherer, "Methods for measuring transverse coupling impedances in circular accelerators" NIM159 (1979) 21. T. Toyama et al., "Coupling Impedance of the J-PARC Kicker Magnets", Proc. of HB2006, 140.
- [21] J. Kamiya et al., IEEE Trans. Appl. Supercond., vol. 16, No.2, June 2006, p.168.
- [22] 外山 毅 他, 「J-PARC リング用機器の結合インピーダンスのベンチ測定」第 5 回加速器学会プロシーディングス(2008), 295.
- [23] K. Takayama et al., 'Microwave Instability at Transition Crossing: Experiments and a

Proton-Klystron Model", Phys. Rev. Lett. 78, 871 - 874 (1997). K.Takayama et al., "Microwave Instability at Transition Crossing in the KEK-PS," Proc. of the 1997 PAC, 1548, (1998).

- [24] T. Toyama, et al., "Bunch shaping by RF voltage modulation with a band-limited white signal", Proc. of 12th Symp. on Acc. Sci. and Tech., 1999. T. Toyama et al., "Bunch shaping by RF voltage modulation with a band-limited white signal-application to the KEK-PS", Proc. of EPAC00, 2000, p. 1578. T. Toyama, NIM A447 (2000) 317-327.
- [25] T. Toyama et al., "Beam Loss at the Beginning of Acceleration in the KEK-PS Main Ring," Proc. of the 1997 PAC, 1599, (1998). T. Toyama et al., "The Eddycurrent induced Head-Tail Instability in the KEK-PS," Proc. of the 1999 PAC.
- [26] R. Cappi, " Observations of High-Order Head-Tail Instabilities at the CERN-PS ", CERN/PS 95-02. (PA), 1995. R. Cappi, *et al.*, "Transverse Performance of the Proton Beam Delivered by the CERN PS Complex for the Future LHC", EPAC2000, 1471.
- [27] 飛山 真理、「個別バンチフィードバックシステム」、加速器学会誌「加速器」Vol.3, No.3, 2006 (263-272). M. Tobiyama, KEKB bunch feedback page 資料, <http://ahfb1.kek.jp/>.
- [28] 中村 剛、「FPGA および高精度 ADC を用いた高分解能横方向 Bunch-by-bunch フィードバック」、加速器学会誌「加速器」Vol.3, No.3, 2006 (263-272).
- [29] G. R. Lambertson, "Dynamic Devices-Pickups and Kickers", in Physics of Accelerators, AIP Conf. Proc. 153, 1414 (1987).
- [30] P. Strehl, "Beam Instrumentation and Diagnostics", Springer, ISBN: 978-3-540-26401-9.